

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

© Эшбеков Р.Х., Нормуродов Х.Н., Алланазарова Т.Ж.
rayxonbek@mail.ru, normurodov.96@bk.ru, j.tazagul86@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.36.

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Вводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (кмКдФ). Доказано разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе пять раз непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: Комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Keywords:

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза вида

$$\begin{cases} p_t = a(t)(p_{xxx} - 6(p^2 + q^2)p_x), \\ q_t = a(t)(q_{xxx} - 6(p^2 + q^2)q_x), \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \\ p_0(x + \pi) &= p_0(x) \in C^5(R), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^5(R) \end{aligned} \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических функций:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in R, \quad t \geq 0, \\ p(x, t), \quad q(x, t) &\in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Эшбеков Райхонбек Хубайдулло угли, ассистент, Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самаканд, Узбекистан.

Нормуродов Хожимурод Нормуминович, аспирант, Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самаканд, Узбекистан

Алланазарова Тазугул, ассистент, Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан

Здесь $a(t) \in C([0, \infty))$ заданная непрерывная ограниченная функция.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спеткральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad \tau \in R \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что комплексное модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза (кМКдФ) $u_t \pm 6|u|u_x + u_{xxx} = 0$ было проинтегрировано в работах [1-3], а также [4-5] в классе быстро-убывающих и конечнзонных функций. Если запишем комплексное модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза соответствующие знаком (-) в виде эквивалентной ему на вещественную и мнимую части функции $u(x, t) = q(x, t) - ip(x, t)$, $i = \sqrt{-1}$, то получим система уравнения вида (1).

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$.

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z$. Они совпадают с собственными значениями задачи Дирихле для системы (4) с граничными условиями $y_1(0, \lambda, \tau, t) = 0$, $y_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$, и при этом $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$, где $\lambda_n = \lambda_n(\tau, t)$, $n \in Z$ корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$, $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$. Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$, называются лакунами

Числа $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z$, и знаки

$$\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}, \quad n \in Z,$$

называются спектральными параметрами оператора L . Спектральные параметры $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ и границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in Z$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$.

Теперь с помощью начальных функций $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau, 0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in Z\}$ оператора $L(\tau, 0)$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1) - (3). Тогда спектральные данные

$$\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1\}, \quad n \in Z,$$

оператора $L(\tau, t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

1. $\frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} = 0,$
2. $\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) a(t) \{4\xi_n^3(\tau, t) + 4p(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t) +$
 $+2(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t))\xi_n(\tau, t) + 2(p(\tau, t)q_\tau(\tau, t) - p_\tau(\tau, t)q(\tau, t)) +$
 $+2p(\tau, t)(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t)) - p_{\tau\tau}(\tau, t)\}, \quad n \in Z. \quad (5)$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \quad (6)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in Z$, - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$ с коэффициентами $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$. Последовательность $h_n(\xi)$, $n \in Z$ участвующая в уравнении (5) определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \times f_n(\xi), \quad (7)$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}$$

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in Z$$

систему дифференциальных уравнения Дубровина можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t)|_{t=0} = x^0(\tau) \in K \quad (8)$$

где $K = \{x(\tau, t) = (\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots) :$

$$\|x(\tau, t)\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})(1 + |n|) |x_n(\tau, t)| < \infty\}$$

Лемма 1. Если $p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^5(R)$, $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^5(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau, t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т.е.

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leq L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|,$$

где

$$L = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|) |k|^3 \gamma_k < \infty \quad (9)$$

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 1 дают метод решения задачи (1) – (3). Действительно, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$, оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z$. Теперь решая задачу Коши (5), (6), при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z$. Из формулы следов

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \quad (10)$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (11)$$

определим функции $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если начальные функции $p_0(x), q_0(x)$ удовлетворяют условиям $p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^5(R), q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^5(R)$, то существует однозначно определяемое решение $p(\tau, t), q(\tau, t)$ задачи (1) – (3), которое определяется соответственно суммой рядов (10), (11) и принадлежит классу $C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$.

Литература

1. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., 32:6,44-47(1972).
2. *Лэм Дж.Л.* Введение в теорию солитонов. М.: "Мир". 1983.
3. *Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У.* Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником // Узб. матем. журн., 2003, No1, с. 69-75.
4. *Смирнов А.О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. // Матем. сб., 185:8(1994), с.103-114.
5. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии // Зап. науч. сем. ПОМИ, 2018, т.473, с.205-227.
6. *Matveev V.B.* 30 years of finite-gap integration theory // Phil. Trans. R Soc. A. Vol. 366, p. 837-875 (2008).
7. *Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н.* Интегрирование нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций // Докл. АНРУз. 2021, No6, с.11-15