

О СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ

@ А.Л. Тасевич

tasevich-al@rudn.ru

УДК 517.954

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.95.

Рассматривается сильно эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее ортотропное сжатие аргументов искомой функции в старшей части. Найдены условия сильной эллиптичности, или выполнения неравенства Гординга, получены результаты о гладкости обобщенных решений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, гладкость обобщенных решений, нелокальные задачи, сильно эллиптическое уравнение, оператор сжатия

On the strong ellipticity of one functional differential equation with orthotropic contractions

One strongly elliptic functional differential equation with orthotropic contraction of unknown function arguments in the upper part is considered. The conditions for strong ellipticity, or the Garding type inequality fulfillment, are obtained and the results on the smoothness of generalized solutions are found.

Keywords: functional differential equation, smoothness of generalized solutions, nonlocal problems, strongly elliptic equation, contraction operator

Рассмотрим первую краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$ARu(x_1, x_2) \equiv - \sum_{i,j=1}^2 (R_{ij}u_{x_i}(x_1, x_2))_{x_j} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in B = \{|x| < r\}, \quad (1)$$

$$R_{ij}v(x_1, x_2) = a_{ij0}v(x_1, x_2) + a_{ij1}v(q_1^{-1}x_1, q_2^{-1}x_2) + a_{ij,-1}v(q_1x_1, q_2x_2).$$

Здесь $q_1, q_2 > 0$, $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$ ($i, j = 1, 2$), $f \in L_2(B)$ является комплекснозначной. Предполагается, что если для некоторой точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in B$ точка $(\tilde{x}_1/q_1^{\pm 1}, \tilde{x}_2/q_2^{\pm 1})$ оказывается вне области, то $v(\tilde{x}_1/q_1^{\pm 1}, \tilde{x}_2/q_2^{\pm 1}) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

Тасевич Алла Львовна, к.ф.-м.н., м.н.с. ФИЦ ИУ РАН, ассистент РУДН (Москва, Россия); Alla Tasevich (FRC CSC RAS, RUDN University, Moscow, Russia)

Сильная эллиптичность оператора A_R и уравнения (1) вводится через выполнение неравенства типа Гординга на множестве финитных бесконечно гладких функций

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} \geq c_1 \|u\|_{H^1(B)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(B)}^2.$$

Исследование достаточных и необходимых условий выполнения неравенства Гординга уравнения было проведено в [1].

Для рассматриваемой задачи верны следующие результаты.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) является сильно эллиптическим в замыкании \bar{B} . Предположим, что функция u является обобщенным решением первой краевой задачи для (1), а функция $f \in L_2(B) \cap H_{loc}^k(B_{sl})$ ($s \in \mathbb{N}$, $l = \overline{1, l(s)}$). Тогда $u \in H_{loc}^{k+2}(B_{sl})$ для всех s, l .

Теорема 2. Пусть уравнение (1) является сильно эллиптическим в замыкании \bar{B} , а также $q_1 > 1$, $1/q_2 > 1$. Предположим, что функция u является обобщенным решением первой краевой задачи для (1), а функция $f \in L_2(B) \cap H^k(B_{sl})$ ($s \in \mathbb{N}$, $l = \overline{1, l(s)}$). Тогда $u \in H^{k+2}(B_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$ ($s \in \mathbb{N}$, $l = \overline{1, l(s)}$), где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

Доказательства данных теорем и другие исследования задачи даны в статьях [2,3,4].

Литература

1. Россовский Л.Е., Тасевич А.Л. Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Матем. сборник. – 2015. – Т.97, № 5. – С. 733-748.
2. Тасевич А.Л. Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 58. – С. 153-165.
3. Россовский Л.Е., Тасевич А.Л. Об однозначной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями в весовых пространствах // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 12. – С. 1679-1692.
4. Tasevich A.L. Analysis of Functional-Differential Equation with Orthotropic Contractions // Math. Model. Nat. Phenom. – 2017. – Vol. 12, No. 6. – С. 240-248.