КАТАСТРОФЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И НАСЛЕДОВАНИЕ РОСТКОВ КАТАСТРОФ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

@ А. М. Шавлуков

aza3727@yandex.ru

УДК 517.958
DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.35.

Показано, что ростки катастроф гладких отображений, определяющих все три типичные (в смысле математической теории катастроф) особенности решений системы уравнений одномерного изоэнтропического газа, совпадают с соответствующими ростками особенностям решений линейного волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Описаны особенности решений в специальном эллиптическом аналоге указанной системы для «газа Чаплыгина».

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, уравнения газовой динамики, теория особенностей, теория катастроф

Catastrophes of solutions to one-dimensional gas flow system and the inheritance of catastrophe germs of solutions to wave equation

It is shown that the catastrophe germs of smooth mappings that define all three typical (in the sense of the mathematical catastrophe theory) singularities of solutions to the system of equations of a one-dimensional isentropic gas flow coincide with the corresponding germs of singularities of solutions to the linear wave equation with constant coefficients. The singularities of solutions in a special elliptical analogue of this system for the ≪Chaplygin gas≫ are described.

Keywords: mathematics, differential equations, mathematical physics equations, gas dynamics equations, singularity theory, catastrophe theory

Рассматривается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/

Шавлуков Азамат Мавлетович, аспирант Института математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Azamat Shavlukov (PHD student, Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science (Ufa, Russia)

где функция $\alpha(\rho) = \frac{p_\rho}{\rho}$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho_* > 0$. Здесь $p(\rho)$ – уравнение состояния газа, $\rho > 0$.

Асимптотику решения в окрестности точки градиентной катастрофы (конечная точка $(\rho_*, u_*; t_*, x_*)$, в которой стремятся к бесконечности все первые производные решения) задают критические точки построенной функции $F(\rho, u; t, x)$. Описана катастрофа типа сечения гиперболической омбилики (D_{4+}). Показано, что ростки катастроф совпадают с соответствующими ростками особенностей решений линейного однородного волнового уравнения с постоянными коэффициентами.

Описана омбилическая особенность для эллиптического аналога (1) в важном частном случае «газа Чаплыгина», соответствующего уравнению состояния $p = const + \frac{p_0\rho_0}{\rho}$. Так же изучен устойчивый гиперболический аналог этого частного случая $p = const - \frac{p_0\rho_0}{\rho}$.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

Литература

1. *Богаевский И. А., Туницкий Д. В.* Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, **308** (2020), 76–87; Proc. Steklov Inst. Math., **308** (2020), 67–78

2. *Рахимов А.Х.* Особенности римановых инвариантов // Функциональный анализ и его приложения, **27**:1 (1993), 46-59; Funct. Anal. Appl., **27**:1 (1993), 39-50

3. *Dubrovin B. A., Grava T, Clein C.* On Universality of Critical Behaviour in the Critical Behaviour in the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation. Elliptic Umbilic Catstrophe and the Tritonque to the Painleve-I Equation // Journal of Nonlinear Science, **19**:1 (2009), 57-94