ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЭНТРОПИЙНЫХ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

@ Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова
kosul@mail.ru, a.kashnikova98@yandex.ru

УДК 517.956.25
*DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.*17.

В работе рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка с нелинейностями определяемыми функциями Музилака-Орлича и правой частью из пространства $L_1(\Omega)$. В пространствах Музилака-Орлича-Соболева устанавливаются некоторые свойства и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях удовлетворяющих сегментному свойству. Кроме того, доказывается эквивалентность и знакоопределенность энтропийных и ренормализованных решений.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, пространство Музилака-Орлича-Соболева, энтропийное решение, ренормализованное решение, неограниченная область, эквивалентность.

Equivalence of entropy and renormalized solutions of a nonlinear elliptic problem in unbounded domains

The paper considers elliptic equations of the second order with nonlinearities determined by the Musielak-Orlicz functions and the right part from the space $L_1(\Omega)$. In the Musielak-Orlicz-Sobolev spaces, some properties and uniqueness of both entropic and renormalized solutions of the Dirichlet problem in domains satisfying the segment property are established. In addition, the equivalence and sign-definiteness of entropy and renormalized solutions are proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, Dirichlet problem, Muzilak-Orlicz-Sobolev space, entropy solution, renormalized solution, unbounded domain, equivalence.

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$, рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + \frac{M(\mathrm{x}, u)}{u} + b(\mathrm{x}, u) = \mu, \quad \mu \in L_1(\Omega),\ \mathrm{x} \in \Omega, \qquad (1)$$

Кожевникова Лариса Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

Кашникова Анастасия Павловна, ассистент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Anastasia Kashnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеют рост, определяемый обобщенной N-функцией $M(\mathrm{x}, z)$. Причем ни функция M, ни дополнительная к ней N-функция $\overline{M}$ не обязаны удовлетворять Δ_2-условию.

I. Chlebicka в работе [1] для уравнения

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \qquad (3)$$

при некоторых условиях регулярности на функцию Музилака-Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ в случае общей меры μ доказала существование, а в случае диффузной меры μ и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле (3), (2).

Если функция Музилака-Орлича M не удовлетворяет Δ_2-условию, то соответствующее пространство Музилка-Орлича не является рефлексивным и рассматриваемая задача значительно усложняется. Обычно, если ограничений на рост обобщенной N-функции $M(\mathrm{x}, z)$ не требуется, то предполагается, что она подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам пространства Музилака-Орлича.

В работе [2] доказано существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$ и неоднородной анизотропной функцией Музилака-Орлича. В работе [3] установлены существование и единственность энтропийного и ренормализованного решений задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$, показана их эквивалентность в пространствах Музилака-Орлича.

Все процитированные выше результаты получены в ограниченных областях. Трудность обобщения на неограниченную область состоит в том, что в ней не работает аналог неравенства Пуанкаре-Соболева и теорема о компактности вложения пространства Музилака-Орлича-Соболева. Решить проблему авторам удалось благодаря добавлению в уравнение (1) слагаемого $M(\mathrm{x}, u)/u$.

Авторами настоящей работы в пространствах Музилака-Орлича доказано существование энтропийного решения и установлено, что оно является ренормализованным решением задачи (1), (2) в произвольной (в том числе и неограниченной) области Ω, удовлетворяющей сегментному свойству (см. [4]). Кроме того, получены некоторые свойства и доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле (1), (2), а также установлена эквивалентность таких решений.

Литература

1. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth

// Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, First View. (2022), 1-31.

2. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak-Orlicz space // J. Differential Equations, **264** (2018), 341-377.

3. *Ying Li, Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak-Orlicz spaces // Nonlinear Analysis: Real World Applications, **61** (2021), 1-20.

4. *Кожевникова Л.М., Кашникова А.П.* Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака–Орлича // Матем. сб., **213**:4, (2022), 38–73.