О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

@ Ф.Р. Турсунов, Д.С. Шодиев, Ж.Д. Раззаков

farhod.tursunov.76@mail.ru, dilshod.shodiev.76@mail.ru

УДК 517.946

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.85.

Работа посвящена изучению продолжения решения задачи Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. В работе при помощи функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама бигармоническая функция, но и её производные.

Ключевые слова: Бигармоническая уравнения, задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

On the Cauchy problem for the biharmonic equation

Short abstract. This work is devoted to the study of the continuation of the solution of the Cauchy problem for the biharmonic equation in the domain G in terms of its known values on the smooth part S of the boundary ∂G . The problem under consideration belongs to the problems of mathematical physics in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. In this paper, using the Carleman function, not only the biharmonic function itself, but also its derivatives are reconstructed from the Cauchy data on a part of the boundary of the region.

Keywords: Biharmonic equations; Cauchy problem; ill-posed problems; Carleman function; regularized solutions; regularization; continuation formulas.

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ и G -ограниченная односвязная область в R^2 с границей ∂G , состоящей из компактной части $T = \{y_1 \in R : a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S : y_2 = h(y_1)$, лежащей в полуплоскости $y_2 > 0$. $\bar{G} = G \cup \partial G, \partial G = S \cup T$.

Турсунов Фарход Рузикулович, д.фил.по ф-м.н., старший преподаватель, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Tursunov Farkhod (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Шодиев Дилшод Сирожиддинович, старший преподаватель, СамГУ, (Самарканд, Узбекистан); Shodiev Dilshod (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Раззаков Жавохир Давлатович, магистрант УргУ, (Урганч, Узбекистан); Razzakov Javoxir (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

В области G рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0, \quad y \in G, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G , т.е.:

$$\begin{aligned} U(y_1, y_2)|_S &= f_1(y), \quad \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_2(y), \\ \frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial n} \Big|_S &= f_3(y), \quad \frac{\partial (\Delta U(y_1, y_2))}{\partial n} \Big|_S = f_4(y), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $f_j(y) \in C^{j-1}(S)$, $j = 1, 2, 3, 4$ - заданные функции, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G .

Рассматриваемая задача (1) – (2) относится к некорректным задачам математической физики [5],[6],[13]. Истинную природу таких задач была выяснено впервые в работе Тихонова А.Н. [4], и им была указано практическую важность неустойчивых задач, а также показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения.

В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши – Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г.М. Голузин и В.И. Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на части границы, уже для произвольных областей. Они нашли формулу восстановления решения по ее значениям на граничном множестве положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А. Айзенберга [1]. Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального уравнения со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [7], [8]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я.Ярмухамедов [9], [10] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области является гиперповерхностью либо конической поверхностью.

В работы [11,12] с помощью функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и его производные для уравнение Лапласа.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и его производный $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $x \in G$, $i = 1, 2$. В данной работе строится семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta}) = U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x, \sigma, f_{k\delta})}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $k = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2$ зависящих от параметра σ и доказывається, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta})$ и $\frac{\partial U(x, \sigma, f_{k\delta})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [7].

Конструкция функции Карлемана

Определим функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ (см. [10]) следующим равенством :

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}. \quad (3)$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(x, y) = & \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2} u du}{u^2 + r^2} - \right. \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} (y_2 - x_2) \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $y' = (y_1, 0)$, $x' = (x_1, 0)$, $r = |y - x|$, $\alpha = |y' - x'|$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2$, $u \geq 0$.

В работе [10] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y), \quad (5)$$

где $F(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, $G_\sigma(x, y)$ - гармоническая функция по y в R^2 включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ для любого $\sigma > 0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x, y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [7].

Для функции $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ и любого $x \in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [13]:

$$\begin{aligned} U(x) = & \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L(x, y))}{\partial n} - \Delta L(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ & + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L(x, y)}{\partial n} - L(x, y) \frac{\partial (\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G, \end{aligned} \quad (6)$$

где $L(x, y) = r^2 \ln \frac{1}{r}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x, y)$ представлена в виде (5), тогда в интегральное представление (6) $L(x, y)$ заменяя на функцию $L_\sigma(x, y) = r^2 \Phi_\sigma(x, y)$, имеем:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial (\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G. \quad (7)$$

Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[f_1(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - f_3(y) \Delta L_\sigma(x, y) \right] dS_y + \\ + \int_S \left[f_2(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - f_4(y) L_\sigma(x, y) \right] dS_y, \quad x \in G. \quad (8)$$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функция $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ на части S границы ∂G удовлетворяют условиям (2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad y \in T, M > 0. \quad (9)$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \varphi(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad (10)$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \varphi_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где

$$\varphi(\sigma, x_2) = \frac{23\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma} + \left(\frac{3\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma} + 20\sqrt{\sigma\pi} + 8\sqrt{\sigma\pi}\sigma \right) x_2 + \\ + (2\sqrt{\sigma\pi} + 4\sqrt{\sigma\pi}\sigma) x_2^2 + \frac{9\sqrt{\sigma\pi}}{2} x_2^3 + \frac{9\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma x_2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\sigma, x_2) = & 10 + \frac{1}{\sigma} + \frac{13\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{165\sqrt{\pi}\sigma}{2} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + \\
& \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^3}{\sqrt{\sigma}} + \left(44\sigma + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + 3 + \frac{2\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} \right) x_2 + \\
& + \left(\frac{17}{2} + \frac{9\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + 4\sigma \right) x_2^2 + 9\sigma x_2^3 + \\
& + \left(\frac{66\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\sigma} + 8 \right) \frac{1}{x_2} + \frac{20\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + 16\sigma,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(\sigma, x_2) = & \frac{21\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{78\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \left(\sqrt{\sigma\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} \right) x_2 + \\
& + (29\sqrt{\sigma\pi} + 58\sqrt{\sigma\pi}\sigma) x_2^2 + \frac{\sqrt{\sigma\pi}}{2} x_2^3 + 10\sqrt{\sigma\pi}\sigma x_2^4 + \frac{60\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через $\bar{G}_\varepsilon$ множество

$$\bar{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in G, \ a > x_2 \geq \varepsilon, \ a = \max_T h(x_1), \ 0 < \varepsilon < a \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\bar{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right\}$ сходится равномерно при $\sigma \rightarrow \infty$, т.е.:

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Следует отметить, что множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Литература

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. // Москва, Наука, 1990.
2. Carleman T. Les Fonctions quasi analytiques. // Paris, 1926. 166p.
3. Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций. // Мат. сб., №40, 1933, 144-149.
4. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. // ДАН СССР, 39:5, (1943), 147-160.

5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. // Москва, Наука, 1995
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. // Москва, Наука, 1974.
7. *Лаврентьев М.М.* О задачи Коши для уравнения Лапласа . //Изв. АН СССР, 20:6, (1956),819-842.
8. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики . //Изд. СО АН СССР, Новосибирск,1962.
9. *Ярмухамедов Ш.* О гармоническом продолжении дифференцируемых функций заданных на куске границы. //Сибирский математический журнал, 43:1, (2002), 228-239.
10. *Ярмухамедов Ш.* Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши . // Математические заметки, 83:5, (2008), 763-778.
11. *А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Уфимский матем. журнал, 11:4, (2019),92-106.
12. *А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, №2,(2021), 56-73.
13. *И.Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений.// ОГИЗ Государственное издательство техника -теоретической литературы. Москва. 1948.