ПРОСТРАНСТВА ДЕ БРАНЖА И КСИ-ФУНКЦИЯ РИМАНА

@ В.В. Капустин

kapustin@pdmi.ras.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.45.

Показано, что кси-функция Римана после деления на многочлен степени 3 становится элементом явно описываемого пространства де Бранжа. Строится оператор в пространстве де Бранжа, спектр которого соответствует множеству нетривиальных нулей дзета-функции Римана после поворота комплексной плоскости. С помощью стандартного унитарного преобразования, связывающего пространства де Бранжа с каноническими системами, строится дифференциальный оператор с таким спектром.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, спектр оператора.

De Branges spaces and the Riemann xi function

It is shown that after division by a polynomial of degree 3, the Riemann xi function becomes an element of an explicitly described de Branges space. An operator on the de Branges space is constructed, whose spectrum corresponds to the set of non-trivial zeros of the Riemann zeta function after a rotation of the complex plane. By using a standard unitary transformation which links de Branges spaces with canonical systems, a differential operator is constructed with this spectrum.

Keywords: Riemann zeta function, spectrum of an operator.

Дзета-функция Римана ζ обладает следующим свойством: функция $\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$ принадлежит классу Харди H^2 в полуплоскости $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$. Рассуждения на основе функционального уравнения для дзета-функции, связанные с ядрами операторами Тёплица, позволяют прийти к предположению, что кси-функция Римана, деленная на многочлен третьей степени с нулями в нулях кси-функции, является элементом пространства де Бранжа со структурной функцией $E(z) = K_s(2\pi)$, где K_s — модифицированная функция Бесселя, $s = \frac{1-iz}{2}$. Этот факт доказывается с помощью асимптотической оценки для функции Бесселя. С его помощью строится оператор в пространстве де Бранжа, спектр которого совпадает с множеством нетривиальных нулей дзета-функции, развернутым на вещественную прямую.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00565 а).
Капустин Владимир Владимирович, д.ф.-м.н., ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, Россия); Vladimir Kapustin (St.Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia)

Одним из ключевых фактов теории пространств де Бранжа является существование канонической системы — дифференциального уравнения, определяющего гильбертово пространство системы и оператор в нём, и унитарного оператора, пересаживающего оператор канонической системы в пространство де Бранжа и осуществляющего его спектральное представление. Для рассматриваемого пространства де Бранжа явно строится соответствующая ему каноническая система и оператор в ней. Оператор со спектром, соответствующим множеству нетривиальных нулей дзета-функции, получается в виде одномерного возмущения оператора канонической системы.