ПОДПРОСТРАНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ОБРАТНОГО СДВИГА, И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

@ С.Н. Мелихов

snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfsedu.ru

УДК 517.547, 517.983.22

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.54.

Описаны собственные замкнутые инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига в пространстве всех функций, голоморфных в односвязной области в комплексной плоскости, содержащей точку 0.

Ключевые слова: голоморфная функция, оператор обратного сдвига, инвариантное подпространство.

Subspaces invariant under the generalized backward shift operator and rational functions

We describe proper closed invariant subspaces of the generalized backward shift operator in the space of all holomorphic functions on a simply connected domain in the complex plane containing the point 0.

Keywords: holomorphic function, backward shift operator, invariant subspace.

Далее Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω . Функция $g_0 \in H(\Omega)$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор обобщенного обратного сдвига $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}$, линейный и непрерывный в $H(\Omega)$.

В докладе описываются собственные замкнутые D_{0,g_0} -инвариантные подпространства $H(\Omega)$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$, $n \geq 0$, — пространство всех многочленов над полем $\mathbb{C}$ степени не выше n ; $\mathbb{C}[z]_{-\infty} := \{0\}$. Кратным многообразием в Ω называется конечная или бесконечная последовательность W пар (λ_k, m_k) , где $\{\lambda_k\}$ — дискретное подмножество Ω и $m_k \in \mathbb{N}$ для любого k . Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω введем множество

$$S(W) := \{f \in H(\Omega) \mid f^{(j)}(\lambda_k) = 0, 0 \leq j \leq m_k - 1 \text{ для любого } k\};$$

Мелихов Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия), ЮМИ ВНИЦ РАН (Владикавказ, Россия); Sergej Melikhov (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia; Southern Mathematical Institute of VSC of RAS, Vladikavkaz, Russia)

$S(W)$ — собственное замкнутое подпространство $H(\Omega)$.

Введем дроби $q_{\lambda,k}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и Υ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C} \setminus \Omega$, т. е. $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, где $n_\lambda \in \mathbb{N}$, Λ — конечное подмножество $\mathbb{C} \setminus \Omega$, то положим

$$\mathbb{C}_\Upsilon^-(z) := \text{span} \{q_{\lambda,k} \mid \lambda \in \Lambda, 1 \leq k \leq n_\lambda\}.$$

При этом $\text{span } U$ обозначает линейную оболочку подмножества U линейного пространства. Если Υ пусто, то полагаем $\mathbb{C}_\Upsilon^-(z) := \{0\}$.

Ниже символ $\mathcal{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$, функция g_0/p голоморфна в Ω и p не имеет корней в $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Пусть $W(g_0)$ — нулевое многообразие g_0 , т. е. множество всех пар $(\mu, n(\mu))$, $\mu \in Z(g_0)$, где $Z(g_0)$ — множество всех нулей g_0 в Ω , а $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω будем писать $W \prec W(g_0)$, если $\{\lambda_k\} \subset Z(g_0)$ и $m_k \leq n(\lambda_k)$ для любого k .

Приведем результат для случая, когда функция g_0 имеет нули в Ω и $\Omega \neq \mathbb{C}$. При этом $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\deg(p)$ — степень многочлена p .

Теорема. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0, $\Omega \neq \mathbb{C}$ и функция g_0 имеет нули в Ω .

(i) Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в Ω множество $S(W)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0} -инвариантным подпространством $H(\Omega)$.

(ii) Для любого многочлена $p \in \mathcal{D}(g_0)$, любого $n \in \mathbb{N}_0$ такого, что $n \geq \deg(p) - 1$, или $n = -\infty$, конечного или пустого кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ множество $\frac{g_0}{p} \mathbb{C}[z]_n + g_0 \mathbb{C}_\Upsilon^-(z)$ является замкнутым D_{0,g_0} -инвариантным подпространством $H(\Omega)$.

При этом оно собственное тогда и только тогда, когда $n \neq -\infty$ или Υ непусто.

(iii) Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0} -инвариантного подпространства S пространства $H(\Omega)$ имеет место одна из следующих ситуаций:

(a) существует непустое кратное многообразие W в Ω такое, что $W \prec W(g_0)$ и $S = S(W)$;

(b) найдутся многочлен $p \in \mathcal{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \geq \deg(p) - 1$ и $S = \frac{g_0}{p} \mathbb{C}[z]_n$;

(c) найдется конечное многообразие Υ в $\mathbb{C} \setminus \Omega$, для которого $S = g_0 \mathbb{C}_{\Upsilon(S)}^-(z)$;

(d) существуют многочлен $p \in \mathcal{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \geq \deg(p) - 1$, и конечное многообразие Υ в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ такие, что $S = \frac{g_0}{p} \mathbb{C}[z]_n + g_0 \mathbb{C}_\Upsilon^-(z)$.

Литература

1. Иванова О.А., Мелихов С.Н., Мелихов Ю.Н. Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции.