О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С УСЛОВИЯМИ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

@ А.Ю. Савин, Е.Н. Семенова

a.yu.savin@gmail.com, semenova54380@gmail.com

УДК 517.946

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.27.

Для эллиптических симметрических неотрицательных операторов на гладком замкнутом многообразии с областью определения, состоящей из функций, обращающихся в нуль на подмногообразии, описывается соответствующее расширение Фридрихса и даются условия его фредгольмовости.

Ключевые слова: задача Соболева, эллиптический оператор, самосопряжённое расширение, относительная эллиптическая теория.

On spectral problems with conditions on submanifolds of arbitrary dimension

We consider elliptic nonnegative symmetric operator on a closed smooth manifold on the space of functions vanishing on a submanifold. We describe the Friedrichs extension of this operator and obtain conditions, under which this extension is Fredholm.

Keywords: Sobolev problem, elliptic operator, self-adjoint extension, relative elliptic theory.

Пусть A — эллиптический симметрический положительный оператор на гладком замкнутом римановом многообразии M порядка $d > 0$. Оператор A будем рассматривать как неограниченный оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^\infty(M) \mid i^*(u) = 0\},$$

где $X \subset M$ — гладкое замкнутое подмногообразие коразмерности $\nu \geq 1$, через $i : X \rightarrow M$ обозначено вложение, а $i^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(X)$ — оператор сужения функций на подмногообразии.

Через $i_* : C^\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$ обозначим кограничный оператор, сопоставляющий функции на подмногообразии её умножение на δ -функцию по нормальным переменным (см. [1,2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Anton Savin (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

Семенова Екатерина Николаевна, студент, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Ekaterina Semenova (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

Теорема 1. 1. Сопряжённый оператор A^* с областью определения $\mathcal{D}(A^*)$ равен

$$\mathcal{D}(A^*) = H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d+\nu/2}(X), \text{ если } d > \nu/2,$$

$$A^*(u + v) = Au, \quad \text{где } u \in H^d(M), \quad v \in A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X).$$

2. Расширение Фридрикса A_F с областью определения $\mathcal{D}(A_F)$ равно

$$\mathcal{D}(A_F) = (H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X)) \cap \ker i^*, \text{ если } d > \nu,$$

$$A_F = A^*|_{\mathcal{D}(A^*)}.$$

При этом расширение Фридрикса A_F является фредгольмовым оператором, и его ядро изоморфно ядру эллиптического псевдодифференциального оператора $i^*A^{-1}i_*$ порядка $-d + \nu$ на подмногообразии X .

Спектральные задачи рассматриваемого вида возникают, например, при исследовании колебаний пластин с рёбрами жёсткости и при исследовании квантовых систем с потенциалами нулевого радиуса.

Литература

1. Стернин Б.Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды ММО., **15** (1966), 346–382.

2. Новиков С.П., Стернин Б.Ю. Эллиптические операторы и подмногообразия // Доклады АН СССР, **171**:3 (1966), 525–528.