ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГАММА-ФУНКЦИИ

@ А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.581

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.46.

Показано, что два классических интегральных представления для гамма-функции $\Gamma(z)$ в открытой правой полуплоскости — первая формула Бине и формула Мальмстена — допускают распространение на мнимую ось с исключенной точкой $z = 0$. Отсюда получены интегральные выражения аргумента комплексной величины, являющейся значением гамма-функции в чисто мнимой точке, а также общий вариант одной формулы Славича (1975 г.) для определенного через гамма-функцию специального отношения $D(z) \equiv \Gamma(z + 1/2)/\Gamma(z + 1)$.

Ключевые слова: гамма-функция, первая формула Бине, формула Мальмстена.

On integral representations of the gamma function

It is shown that two classical integral representations for the gamma function in the open right half-plane — the first Binet formula and the Malmsten's formula — admit the extension on the imaginary axis with the excluded point $z = 0$. From this, integral expressions for the argument of the value of the gamma function at a purely imaginary point are obtained, as well as a general version of one result of Slavich (1975) for a special ratio $D(z) \equiv \Gamma(z + 1/2)/\Gamma(z + 1)$ defined through the gamma function.

Keywords: gamma function, first Binet formula, Malmsten's formula.

Как известно, *первой формулой Бине* называют представление

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp \left\{ z \ln z - z + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-zt}}{t} dt \right\},$$

Костин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Andrey Kostin (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

$\operatorname{Re} z > 0$, а *формулой Мальмстена* — близкое по форме, но более компактное представление

$$\Gamma(z) = \exp \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

В подобном виде интегральные представления Бине и Мальмстена обычно подают в справочной литературе. По поводу доказательства этих классических результатов см. [1, гл. 12, § 12.31], [2].

Оказывается, обе формулы справедливы (при $z \neq 0$) и на мнимой оси. Отсюда, в частности, извлекаются следующие соотношения

$$\begin{aligned} y \ln y - y - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{\sin(yt)}{t} dt = \\ = \int_0^{+\infty} \left(ye^{-t} - \frac{\sin(yt)}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t} \in \operatorname{Arg} \Gamma(iy), \quad y > 0, \end{aligned}$$

дополняющие известную явную формулу

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \operatorname{sh}(\pi y)}, \quad y > 0.$$

Рассмотрим теперь величину

$$D(z) \equiv \frac{\Gamma(z + 1/2)}{\Gamma(z + 1)}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq 0,$$

важную уже тем, что в точках $z = n \in \mathbb{N}$ она совпадает с нормированным центральным биномиальным коэффициентом. Справедливо интегральное представление

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t} e^{-4tz} dt \right\}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad z \neq 0,$$

отмеченное без доказательства в [3] на положительной полуоси $z = x > 0$. Для чисто мнимых значений переменной оно дает при $y > 0$ пару соотношений

$$|D(iy)|^2 = \frac{\operatorname{th}(\pi y)}{y} = \frac{1}{y} \exp \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t} \cos(4yt) dt \right\},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t} \sin(4yt) dt - \frac{\pi}{4} \in \operatorname{Arg} D(iy).$$

Подробные доказательства результатов представлены в готовящейся к публикации работе [4].

Литература

1. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. — Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
2. *Malmstén C.J.* Sur la formule $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{2!} \Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{4!} \Delta u_x^{IV} + \text{etc.}$ // J. Reine Angew. Math., **35**:1 (1847), 55-82.
3. *Slavić D.V.* On inequalities for $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$ // Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika, **498/541** (1975), 17-20.
4. *Костин А.Б., Шерстюков В.Б.* Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимский матем. журн., **13**:4 (2021).