ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ВРОНСКИАНЫ

@ А.А. Аллахвердян

alinaallahverdyan@mail.ru

УДК 517.41

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.1.

Рассматриваются новые вронскианые тождества, а также их связь с теорией интегрируемых систем и с общей теорией обратимых преобразований Дарбу для линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной. Объектом исследования являются отношения вронскианов, являющиеся однородными относительно группы растяжений, различных порядков N и N' , где $N' > N$.

Ключевые слова: факторизация, матрица Вронского, преобразование Дарбу.

The product of eigenfunctions and Vronskians

New Vronskians of the identity are considered, as well as their connection with the theory of integrable systems and with the general theory of reversible Darboux transformations for linear differential operators with one independent variable. The object of the study is the relations of Vronskians, which are homogeneous with respect to the group of extensions, of different orders N and N' , where $N' > N$.

Keywords: factorization, Vronsky matrix, Darboux transformation.

Задача о построении дифференциального оператора L порядка $n \geq 2$ по фундаментальной системе решений уравнения $L\varphi_j = 0$, $j = \overline{1, n}$ сводится к линейной алгебре, и формулы Крамера дают нам следующую формулу с вронскианами для действия оператора $L(\varphi)$ на произвольную гладкую функцию φ :

$$L(\varphi) = \frac{\langle \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}, \quad \varphi_j \in \ker L$$

Здесь предполагается, что заданные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ образуют базис n -мерного линейного пространства $\ker L$, а скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают определитель матрицы Вронского, составленной из производных рассматриваемых функций $\langle y_1, \dots, y_m \rangle = \det(D_x^{k-1}(y_j))$, $j, k = 1, \dots, m$.

Аллахвердян Алина Альбертовна, студентка магистратуры Адыгейского государственного университета (Майкоп, Россия); Alina Allahverdyan (Adyge State University, Maykop, Russia)

Формула, задающая оператор L заменяет нам разложение обычного многочлена в произведение линейных сомножителей и играет аналогичную роль, если мы уточняем структуру ядра рассматриваемого дифференциального оператора L .

Согласно свойствам определителей и формулам Лейбница, справедливо:

$$y_j(x) = a(x)\hat{y}_j(x), \quad \forall j \Rightarrow \langle y_1, \dots, y_m \rangle = a^m \langle \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m \rangle.$$

Отметим, что на языке дифференциального оператора эта операция совпадает с операцией сопряжения

$$L \Leftrightarrow \tilde{L}, \quad L = \frac{1}{a} \cdot \tilde{L} \circ a.$$

Для вронскианов при $a(x) = 1/\varphi_n$ данная операция соответствует переходу в матрице Вронского к однородным координатам и их логарифмическим производным:

$$\begin{aligned} w_n(\vec{\psi}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \rangle}{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n} = \\ &= (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n-1} \\ g'_1 + g_1^2 & g'_2 + g_2^2 & \dots & g'_{n-1} + g_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \\ g_j &= (\log \psi_j)_x - (\log \psi_n)_x = \frac{\langle \psi_j, \psi_n \rangle}{\psi_j \psi_n}, \quad j = \overline{1, n-1} \end{aligned}$$

При $g = \phi'/\phi = (\log \phi)_x$, согласно [1] дальнейшее дифференцирование даёт:

$$\frac{\phi''}{\phi} = g' + g^2, \quad \frac{\phi'''}{\phi} = g'' + 3gg' + g^3, \quad \frac{\phi^{(4)}}{\phi} = g^{(3)} + 4gg_{xx} + 3g_x^2 + 6g^2g_x + g^4 \dots$$

При подстановке однородных мономов $\varphi_1^j \varphi_2^k = j + k = m$ в общую формулу

$$\frac{\langle \varphi_1^m, \dots, \varphi_1^j \varphi_2^k, \dots, \varphi_2^m \rangle}{(\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle)^{10}}$$

является естественным ожидать, что коэффициенты полученного оператора могут зависеть от конкретного выбора базиса φ_1 и φ_2 . Однако это не так и объяснение обнаруженной инвариантности в случае четвёртого порядка даёт следующая

Теорема 1. Пусть φ_1 и φ_2 произвольные гладкие функции и $\psi_1 = \varphi_1^3$, $\psi_2 = \varphi_1^2 \varphi_2$, $\psi_3 = \varphi_1 \varphi_2^2$, $\psi_4 = \varphi_2^3$. Тогда имеет место тождество:

$$\frac{< \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 >}{(< \varphi_1, \varphi_2 >)^6} = 12.$$

Отметим, что когда $\psi_1 = \varphi_1^2 \varphi_2$, $\psi_2 = \varphi_1 \varphi_2^2$, $\psi_3 = \varphi_1^3$, $\psi_4 = \varphi_2^3$

$$L(\psi) = \frac{< \psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 >}{< \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 >} = \psi'''' - 10(u\psi'' + u'\psi') - 3(u'' - 3u^2)\psi.$$

где $\varphi'' = u(x)\varphi$.

После интегрирования уравнение $L\psi = 0$ третьего порядка приводится к виду:

$$C(\lambda) = \psi_x^2 + 4(u - \lambda)\psi^2 - 2\psi_{xx}\psi,$$

где $C(\lambda)$ — постоянная интегрирования, а λ — дополнительный параметр. При $\psi = \varphi_1 \varphi_2$ устанавливается связь константы интегрирования с вронскианом $w = < \varphi_1, \varphi_2 >$:

$$C(\lambda) = (f_1 - f_2)^2 = < \varphi_1, \varphi_2 - >^2.$$

С другой стороны $(\log \psi)_x = (\log \varphi_1)_x + (\log \varphi_2)_x = f_1 + f_2$ и поэтому

$$f_1 = \frac{\psi_x - w}{2\psi}, \quad f_2 = \frac{\psi_x + w}{2\psi}$$

Полученные формулы переводят, таким образом, решение уравнения $C(\lambda) = \psi_x^2 + 4(u - \lambda)\psi^2 - 2\psi_{xx}\psi$ с "производной" Шварца в пару решений уравнения Риккати [2].

Также справедливо и обобщение *теоремы 1* на случай пятого порядка:

Теорема 2. Пусть φ_1 и φ_2 произвольные гладкие функции и $\psi_1 = \varphi_1^4$, $\psi_2 = \varphi_1^3 \varphi_2$, $\psi_3 = \varphi_1^2 \varphi_2^2$, $\psi_4 = \varphi_1 \varphi_2^3$, $\psi_5 = \varphi_2^4$. Тогда имеет место тождество:

$$\frac{< \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5 >}{(< \varphi_1, \varphi_2 >)^{10}} = 288.$$

Если применить формулу перехода в матрице Вронского к однородным координатам и их логарифмическим производным справедлива формула:

$$\frac{w_5(\vec{\psi})}{g_1 \cdots g_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & g_4^2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 & g_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (g_i - g_j) + \dots,$$

где многоточие - это слагаемые вида $g' + g^2, g'' + 3gg' + g^3, g^{(3)} + 4gg_{xx} + 3g_x^2 + 6g^2g_x + g^4 \dots$.

Стоит отметить, что справедливость *теоремы 2* вытекает из $\frac{w_5(\vec{\psi})}{g_1 \dots g_4}$ при $g'_j = 0$, последнее достигается в случае экспоненциальных функций φ_1 и φ_2 .

В заключении отметим, что вопросы о приложениях оператора пятого порядка, а также связь с производной Шварца и уравнениями Кортевега де Фриза остаются открытыми.

Литература

1. *Шабат А.Б., Эфендиев М.Х.* О приложениях формулы Фaa-ди- Бруно // Уфимск. матем. журн., **9:3** (2017), 132-137.
2. *Аллахвердян А.А.* О преобразованиях Дарбу для функций Бесселя // ВМЖ , **21:3** (2019), 5-13.