О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОТЕНЦИАЛОВ

@ А.Б. Баймурзаева, Л.К. Кусаинова

Аncara-muz05@mail.ru, leili2006@mail.ru

УДК 517.982

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.38.

В работе дано определение весового пространства потенциалов $H_p^m(\Omega; \rho, v_m)$. Получено описание точечных мультипликаторов на паре этих пространств.

Ключевые слова: весовые пространства потенциалов, мультипликаторы.

On multipliers in weighted potential spaces

The definition of weighted potential spaces $H_p^m(\Omega; \rho, v_m)$ is given. The description of point multipliers on a pair of these spaces is obtained.

Keywords: weighted potential spaces, multipliers.

Пусть (X, Y) - пара банаховых пространств функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, Ω - произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Под точечным мультипликатором на паре (X, Y) мы будем понимать функцию $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, задающую ограниченный оператор умножения $Tf = \gamma f$ из X в Y . Пространство всех таких функций обозначается через $M(X \rightarrow Y)$. Вводится норма

$$\|\gamma; M(X \rightarrow Y)\| = \|T; X \rightarrow Y\|$$

(См.[1]). В данной работе получено описание мультипликаторов на паре весовых пространств $(H_p^{m_0}(\Omega; \rho, v_{m_0}), H_p^{m_1}(\Omega; \rho, v_{m_1}))$ положительной гладкости $m_0 > m_1 > 0$, $1 < p < \infty$. Пространства $H_p^m(\Omega; \rho, v_m)$ были введены в [2]. Приведены примеры. В общем случае $v_m(x) = \rho(x)h^{-m}(x)$, $\rho(x) > 0$, $0 < h(x) \leq 1$ - функции в Ω , подчиненные условиям:

- 1) $Q(x) = Q_{h(x)}(x) \subset \Omega$
- 2) существуют такие $\varkappa > 1$, $0 < \tau < 1$, что

$$\varkappa^{-1} \leq \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leq \varkappa, \text{ если } y \in \tilde{Q}(x) = \tau Q(x)$$

Работа была проделана при поддержке гранта МОН РК AP08856104.

Баймурзаева Анар Батыргазыевна, докторант, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Anar Baimurzaeva (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Leili Kussainova (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Здесь $\tau Q_h(x) = Q_{\tau h}(x)$, $Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{h}{2}, 1 \leq i \leq n\}$.

Существует счетное конечно-кратное и конечно-разделимое семейство кубов $\tilde{Q}^j = \frac{3}{4}\hat{Q}^j$, $\tilde{Q}^j = \tilde{Q}(x^j)$ и соотнесенное ему семейство функций $\psi_j \in C_0^\infty(\tilde{Q}^j)$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j = 1$ на $\hat{Q}^j$ такие, что:

- 1) $\Omega = \bigcup_{j \geq 1} \hat{Q}^j$; $\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$ в Ω ;
- 2) $|D^\alpha \psi_j| \leq c(m)h^{-m}(x^j)$, если $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = m$ (см. [2]).

По определению $H_p^m(\Omega; \rho, v_m)$ есть пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f; H_p^m(\Omega; \rho, v_m)\| = \left[\sum_{j \geq 1} (\rho^p(x^j) \|\psi_j f; H_p^m\|^p + v_m^{-mp}(x^j) \|\psi_j f; L_p\|^p) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

В (1) H_p^m - пространство бесселевых потенциалов [1, 2.1], $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$. Положим [1, 2.1]

$$S_l f(x) = \begin{cases} |\nabla_l f(x)|, & \text{если } l \in \mathbb{N}, \\ \left(\int_0^\infty \left[\int_{B_1} |\nabla_{[l]} f(x + \xi \lambda) - \nabla_m f(x)| d\xi \right]^2 \frac{d\lambda}{\lambda^{1+2\{l\}}} \right)^{1/2}, \end{cases}$$

если $l > 0$ - нецелое, $[l]$ - целая, l - дробная части l . Пусть $\theta \in C_0^\infty(Q_0)$, $Q_0 = Q_1(0)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ на τQ_0 , $\theta_x(y) = \theta(\frac{y-x}{h(x)})$

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $m > 0$ - целое, $mp > n$, $0 < l < m$. Тогда

$$\gamma \in M(H_p^m(\Omega; \rho, v_m) \rightarrow H_p^l(\Omega; \rho, v_l)),$$

если и только если $\gamma \in H_{p,loc}^l$ и

$$\mathcal{R}_{m,l,p}(\gamma) = \sup_{x \in \Omega} h^{m-\frac{n}{p}}(x) (\|S_l(\theta_x \gamma); L_p\| + h^{-l}(x) \|\theta_x \gamma; L_p\|) < \infty.$$

Норма

$$\|\gamma; M(H_p^m(\Omega; \rho, v_m) \rightarrow H_p^l(\Omega; \rho, v_l))\| \sim \mathcal{R}_{m,l,p}(\gamma).$$

Литература

1. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций // Ленинградский государственный университет им. А.А. Жданова . - Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986 . - 402 с.

2. Kussainova L.K., Sultanaev Ya.T., Murat G.K. Approximate Estimates for a Differential Operator in a Weighted Hilbert Space // Differential Equations. 2019. Vol. 55, No 12. P. 1589-1597.