ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ЕВКЛИДОВОМ ШАРЕ

@ М.В. Невский
mnevsk55@yandex.ru

УДК 517.51, 514.17

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.59.

Приводятся оценки для норм проекторов при интерполяции непрерывных функций, заданных на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$, с помощью многочленов степени ≤ 1 .

Ключевые слова: интерполяция, проектор, норма, шар, симплекс, оценка.

Interpolation by linear functions on a Euclidean ball

We present some estimates for the norms of projectors related to interpolation of continuous functions defined on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$ by polynomials of degree ≤ 1 .

Keywords: interpolation, projector, norm, ball, simplex, estimate.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через B_n евклидов единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x\| \leq 1$, $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Положим $\varkappa_n := \text{vol}(B_n)$. Под $C(B_n)$ будем понимать пространство непрерывных функций $f: B_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(B_n)} := \max_{x \in B_n} |f(x)|,$$

под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 , т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — вершины n -мерного невырожденного симплекса $S \subset B_n$. Интерполяционный проектор $P: C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий этому симплексу, определяется равенствами

$$Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)}), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Через $\|P\|_{B_n}$ обозначим норму P как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Определим θ_n как минимальную величину нормы P при условии $x^{(j)} \in B_n$.

Невский Михаил Викторович, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Mikhail Nevskii (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

В статье [2] предложен и реализован подход, при котором норму интерполяционного проектора удаётся оценить снизу через объём соответствующего симплекса. Этот подход опирается на некоторые специально установленные свойства классических ортогональных многочленов Лежандра. Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$$

(формула Родрига). Известно, что $\chi_n(1) = 1$, $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Обозначим через χ_n^{-1} функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1, +\infty)$.

Теорема 1. *Для любого симплекса $S \subset B_n$ и соответствующего интерполяционного проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ верно неравенство*

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\kappa_n}{\text{vol}(S)} \right). \quad (1)$$

Из (1) выводится, что существует универсальная константа $c > 0$, такая что для любого n и любого интерполяционного проектора P справедлива оценка $\|P\|_{B_n} > c\sqrt{n}$. Как показано в [2], подходящей константой является $c = 0.2135$.

Особый интерес представляет случай, когда узлы интерполяционного проектора находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в шар (т. е. в граничную сферу $\|x\| = 1$). Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \sqrt{t(n+1-t)} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|, \quad 0 \leq t \leq n+1.$$

Обозначим

$$a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Автором доказана следующая теорема (см. [1]).

Теорема 2. *Пусть S^* — произвольный правильный симплекс, вписанный в B_n , P^* — соответствующий интерполяционный проектор. Имеет место равенство*

$$\|P^*\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

Всегда

$$\sqrt{n} \leq \|P^*\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}.$$

При этом $\|P^*\|_{B_n} = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P^*\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Приведённые утверждения означают, что с константами, не зависящими от n , справедлива эквивалентность $\theta_n \asymp \sqrt{n}$.

По крайней мере для $1 \leq n \leq 4$ проектор P^* , соответствующий правильному вписанному симплексу, имеет минимальную норму, т. е. имеет место равенство $\theta_n = \|P^*\|_{B_n}$; два различных доказательства даны в [1] и [3]. Вопрос о справедливости этого равенства для произвольного n остаётся открытым.

Литература

1. Невский М.В., Ухалов А.Ю. Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем, **26**:2 (2019), 279-296.
2. Невский М.В. Геометрические оценки при интерполяции на n -мерном шаре // Модел. и анализ информ. систем, **26**:3 (2019), 441-449.
3. Невский М.В. О свойствах правильного симплекса, вписанного в шар // Модел. и анализ информ. систем, **28**:2 (2021), 186-197.