АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

@ В.Е. Федоров, Н.В. Филин

kar@csu.ru, nikolay_filin@inbox.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.86.

Исследуется однозначная разрешимость линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. Получены условия в терминах резольвенты замкнутого оператора из правой части уравнения, необходимые и достаточные для существования такого семейства операторов, а также изучены его свойства. Эти результаты использованы для доказательства существования единственного решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения соответствующего класса.

Ключевые слова: дискретно распределенная дробная производная, задача Коши, разрешающее семейство операторов.

Analytic resolving families of operators for equations with discretely distributed fractional derivative

We study the unique solvability of linear equations in Banach spaces with a discretely distributed Gerasimov — Caputo fractional derivative in terms of analytic resolving families of operators. Necessary and sufficient conditions for the existence of such a family of operators are obtained in terms of the resolvent of a closed operator from the right side of the equation, and their properties are studied. These results are used to prove the existence of a unique solution to the Cauchy problem for a linear inhomogeneous equation of the corresponding class.

Keywords: discretely distributed fractional derivative, Cauchy problem, resolving family of operators.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с дискретно распределенной дробной производной

$$\sum_{k=1}^n \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-54003).

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Vladimir E. Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Филин Николай Владимирович, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Nikolay V. Filin (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, $m-1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, D^{α_k} — производные Герасимова — Капуто, $k = 1, 2, \dots, n$, A — линейный замкнутый плотно определенный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. Решением уравнения (1) будем называть такую функцию $z \in C^{m-1}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $D^{\alpha_k} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и выполняется равенство (1) при $t > 0$.

Семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \geq 0\}$, $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, называется *l-разрешающим* для уравнения (1), если выполняются следующие условия:

- (i) $S_l(t)$ сильно непрерывно при $t \geq 0$;
- (ii) $S_l(t)[D_A] \subset D_A$, $S_l(t)Az = AS_l(t)z$ для всех $z \in D_A$, $t \geq 0$;
- (iii) $S_l(t)z_l$ является решением задачи

$$z^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}, \quad z^{(l)}(0) = z_l$$

для уравнения (1) при любом $z_l \in D_A$.

Аналитическое в $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, t \neq 0\}$ *l-разрешающее* семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \geq 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\Re t}$.

Будем говорить что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, если выполняются условия:

- 1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$;
- 2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k-1} \left(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

В работе [1] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Аналитическое θ -разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$ для уравнения (1) существует тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. При этом разрешающее семейство единственно, имеет вид*

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k-1} \left(\sum_{k=1}^n \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} d\lambda.$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

Теорема 2. Пусть $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > 1$, существует θ -разрешающее семейство операторов $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}) : t \geq 0\}$ типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$, $a_0 \geq 0$, для уравнения (1). Тогда существуют l -разрешающие семейства $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}) : t \geq 0\}$ типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$, $a_0 \geq 0$, $l = 1, 2, \dots, m - 1$, уравнения (1).

Теорема 3. Пусть $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $g \in C([0, T]; D_A) \cup C^\gamma([0, T]; \mathbb{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, $z_l \in D_A$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1, \quad \sum_{k=1}^n \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t) + g(t), \quad t > 0.$$

Литература

1. Федоров В.Е., Филин Н.В. Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **27:2** (2021), 264-280.