О ЛОКАЛЬНОЙ ℓ^p -СТРУКТУРЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ТИПА.

@ С.В. Асташкин

astash56@mail.ru

УДК 517.982.22, 517.982.27

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.37.

Для произвольного сепарабельного симметричного пространства последовательностей X фундаментального типа найдено множество всех $p \in [1, \infty]$, для которых пространство ℓ^p финитно представимо в X таким образом, что векторы канонического базиса в ℓ^p (c_0 , если $p = \infty$) соответствуют попарно дизъюнктным элементам, имеющим одинаковое порядковое распределение.

Ключевые слова: ℓ^p , финитная представимость, симметричное пространство последовательностей, оператор растяжения, индексы Бойда, пространство Орлича, пространство Лоренца.

On local ℓ^p -structure of symmetric sequence spaces of fundamental type

For a separable symmetric sequence space X of fundamental type we identify the set of all $p \in [1, \infty]$ such that ℓ^p is finitely represented in X in such a way that the unit basis vectors of ℓ^p (c_0 if $p = \infty$) correspond to pairwise disjoint elements with the same ordered distribution.

Keywords: ℓ^p , finite representability, symmetric sequence space, dilation operator, Boyd indices, Orlicz space, Lorentz space.

Еще в 1961 г. была опубликована знаменитая теорема Дворецкого [1] о том, что ℓ^2 финитно представимо в любом бесконечномерном банаховом пространстве X . Позднее, в 1976 г. Кривине [2] доказал, что для всякой нормированной последовательности $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ любого банахова пространства X , элементы которой не образуют предкомпактного множества в X , существует такое $p \in [1, \infty]$, что ℓ^p ($\ell^\infty \equiv c_0$) финитно представимо в ее замкнутой линейной оболочке, причем векторы канонического базиса в ℓ^p соответствуют последовательным элементам некоторого блок-базиса последовательности $\{z_i\}$.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2021-1393.

Асташкин Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, Самарский национальный исследовательский университет (Самара, Россия); Sergey Astashkin (Samara National Research University, Samara, Russia)

В случае симметричных пространств последовательностей можно говорить о финитной представимости ℓ^p -пространств специального вида. Напомним, что банахова решетка X последовательностей вещественных чисел называется *симметричным пространством*, если из того, что $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in X$ и $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условию $x_k^* \leq y_k^*$, $k = 1, 2, \dots$, следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Здесь $(u_k^*)_{k=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|u_k|)_{k=1}^\infty$, т.е.

$$u_k^* := \inf_{\text{card } A=k-1} \sup_{i \in \mathbb{N} \setminus A} |u_i|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Будем говорить, что последовательности $u = (u_k)_{k=1}^\infty$ и $v = (v_k)_{k=1}^\infty$ имеют *одинаковое порядковое распределение*, если $u_k^* = v_k^*$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пусть X — симметричное пространство последовательностей, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда пространство ℓ^p *симметрично финитно представимо* в X , если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют попарно дизъюнктные элементы $x_k \in X$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеющие одинаковое порядковое распределение, такие, что для любых $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$,

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|(a_k)_{k=1}^n\|_{\ell^p} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|(a_k)_{k=1}^n\|_{\ell^p}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим *операторы растяжения* σ_m и $\sigma_{1/m}$ на множестве всех последовательностей: если $a = (a_n)_{n=1}^\infty$, то

$$\sigma_m a = (a_{[\frac{m-1+n}{m}]})_{n=1}^\infty = (\overbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}^m, \overbrace{a_2, a_2, \dots, a_2}^m, \dots)$$

и

$$\sigma_{1/m} a = \left(\frac{1}{m} \sum_{k=(n-1)m+1}^{nm} a_k \right)_{n=1}^\infty.$$

Эти операторы ограничены во всяком симметричном пространстве последовательностей X и $\|\sigma_m\|_X \leq m$, $\|\sigma_{1/m}\|_X \leq 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ [3]. Числа

$$\alpha_X := - \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \|\sigma_{1/m}\|_X}{\log_2 m} \quad \text{и} \quad \beta_X := \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \|\sigma_m\|_X}{\log_2 m}$$

называются *индексами Бойда* пространства X .

Функция $\phi_X(n) := \|\chi_{\{1,2,\dots,n\}}\|_X$, $n \in \mathbb{N}$, где χ_A — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{N}$, называется *фундаментальной функцией* симметричного пространства последовательностей X . Если

$$\alpha_X = - \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_X(n)}{\phi_X(mn)}}{\log_2 m} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_X(mn)}{\phi_X(n)}}{\log_2 m},$$

то говорят, что симметричное пространство последовательностей X — пространство *фундаментального типа*.

Все наиболее известные и важные в теории и приложениях симметричные пространства, в частности, Орлича и Лоренца, являются пространствами фундаментального типа.

Теорема. *Если X — сепарабельное симметричное пространство последовательностей фундаментального типа, то ℓ^p симметрично финитно представимо в X , если и только если $p \in [1/\beta_X, 1/\alpha_X]$.*

Литература

1. Dvoretzky A. Some results on convex bodies and Banach spaces // Proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem, 1961, 123–160.
2. Krivine J. L. Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés // Ann. Math., **104**:2 (1976), 1–29.
3. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.