СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

@ Р.С. Юлмухаметов

yulmukhametov@mail.ru

УДК 517.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.67.

В работе рассматриваются интегрально весовые L_2 -пространства на выпуклых областях $\mathbb{R}^n$ и исследуется задача описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье–Лапласа.

Ключевые слова: весовые пространства, преобразование Фурье–Лапласа, целые функции.

Duals to weighted spaces of locally integrable functions

The paper considers weighted L_2 -spaces on convex domains in $\mathbb{R}^n$ and investigates the problem of describing the dual space in terms of Fourier–Laplace transform.

Keywords: weighted spaces, Fourier–Laplace transform, entire functions.

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и φ — выпуклая выпуклая функция на этой области. Через $L_2(D, \varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций на D , для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int_D |f(t)|^2 e^{-2\varphi(t)} dt.$$

Система функций $e^{t\lambda}$, где $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и $t\lambda = \sum_{k=1}^n t_k \lambda_k$, полна в гильбертовом пространстве $L_2(D, \varphi)$, поэтому преобразование Фурье–Лапласа

$$\mathcal{L} : S \rightarrow S(e^{t\lambda}), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

отображает сопряженное пространство $L_2^*(D, \varphi)$ на некоторое пространство $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ функций на $\mathbb{C}^n$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств это пространство $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ состоит из функций вида

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_D e^{t\lambda - 2\varphi(t)} \overline{f(t)} dt, \quad f \in L_2(D, \varphi),$$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Юлмухаметов Ринад Салаватович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Rinad Yulmukhametov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

в частности, $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ является подпространством пространства целых функций. Пространство $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ гильбертово относительно наведенного скалярного произведения $(\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g)$.

Заметим, что точечные функционалы $\delta_\lambda : F \rightarrow F(\lambda)$ непрерывны в пространстве $\widehat{L}_2(D, \varphi)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Функцию

$$K(\lambda) := \|\delta_\lambda\|^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

называют функцией Бергмана.

В данной работе рассматривается вопрос о весовом описании наведенной нормы в этом пространстве. В одномерном случае вопрос полностью решен ранее в работе [1].

При некоторых ограничениях на весовую функцию φ доказано, что целая функция F представляется в виде преобразования Фурье-Лапласа функции из $L_2(D, \varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\|F\|^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|F(x + iy)|^2}{K(x + iy)} \det G(\tilde{\varphi}, x) dy dx < \infty,$$

где $G(\tilde{\varphi}, x)$ — матрица Гессе функции $\tilde{\varphi}$, сопряженной по Юнгу к функции φ .

В качестве примера показано, что для случая, когда D — единичный шар и $\varphi(t) = a(1 - |t|)^{-\beta}$, $\beta < 0$, пространство преобразований Фурье-Лапласа изоморфно пространству целых функций $F(z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, для которых

$$\|F\|^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^2 e^{-2|x| - 2(a\beta)^{\frac{1}{\beta+1}}(a+1)|x|^{\frac{\beta}{\beta+1}}} |x|^{\frac{\alpha-3}{2}} dx dy < \infty,$$

где $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$.

Литература

1. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства // Матем. заметки, **48:5** (1990), 80-87.