ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

@ Д.М. Поляков
DmitryPolyakov@mail.ru

УДК 517.927

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.25.

Рассматривается несамосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка с негладкими периодическими коэффициентами и многоточечными краевыми условиями. Получена асимптотика собственных значений при высоких энергиях, а также написана формула регуляризованного следа.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, многоточечные краевые условия, формула следа.

Trace formula for fourth-order differential operator with multi-point boundary conditions

We consider a non-self-adjoint fourth-order differential operator with nonsmooth periodic coefficients and multi-point Dirichlet boundary conditions. We obtain high energy eigenvalues asymptotics and formula for regularized trace.

Keywords: fourth-order differential operator, multi-point boundary conditions, trace formula.

Рассмотрим несамосопряженный оператор H , действующий в пространстве $L^2(0, 3)$, который определяется дифференциальным выражением

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y(1) = y(2) = y(3) = 0, \quad (1)$$

где вещественные и 1-периодические коэффициенты p и q принадлежат пространству $L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

С физической точки зрения оператор H описывает колебания периодической балки, зафиксированной в четырех точках. Хорошо известно, что L -оператором в паре Лакса для уравнения Кортевега-де Фриза (KdV) на окружности является оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом. Динамика решений начальной задачи для уравнения KdV описывается семейством изоспектральных потенциалов для оператора

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., ЮМИ ВНИЦ РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry M. Polyakov (Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia)

Шрёдингера. Каждое семейство параметризуется спектром задачи Дирихле для оператора Шрёдингера (см. [1]).

Аналогичным образом, дифференциальный оператор четвертого порядка с периодическими коэффициентами является L -оператором в паре Лакса для следующей системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} p_t = 10p''' + 6pp' - 24q', \\ q_t = 3(p^{(5)} + pp''' + p'p'') - 8q''' - 6pq'. \end{cases}$$

При этом динамика решений указанной системы описывается "изоспектральным" семейством, которое параметризуется оператором H . Таким образом, исследование спектральных свойств оператора H играет ключевую роль для поиска решения указанной задачи.

Перейдем к формулировке основных результатов настоящей работы. Стандартным образом для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ определим коэффициенты Фурье

$$f_0 = \int_0^1 f(x) dx, \\ \widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x) \cos 2\pi nx dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x) \sin 2\pi nx dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Первый результат посвящен асимптотическим формулам для собственных значений оператора H , которые мы обозначим через μ_n и $\mu_{-n}^\pm$.

Теорема 1. Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$ и число $n \in \mathbb{N}$ выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения μ_n являются простыми и вещественными, собственные значения $\mu_{-n}^\pm$ имеют алгебраическую кратность 1 или 2 и для $n \rightarrow +\infty$ удовлетворяют следующей асимптотике

$$\mu_n = (\pi n)^4 - (\pi n)^2(p_0 + \widehat{p}_{cn}) + \mathcal{O}(n),$$

$$\mu_{-n}^\pm = -4(\pi n)^4 + 2(\pi n)^2(p_0 - \widehat{p}_{cn} \pm |\widehat{p}_{sn}|) + \mathcal{O}(n).$$

Если дополнительно предположить, что $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, тогда для собственных значений μ_n и $\mu_{-n}^\pm$ при $n \rightarrow +\infty$ имеют место следующие формулы

$$\mu_n = (\pi n)^4 - (\pi n)^2(p_0 + \widehat{p}_{cn}) - \widehat{q}_{cn} + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

$$\mu_{-n}^\pm = -4(\pi n)^4 + 2(\pi n)^2(p_0 - \widehat{p}_{cn} \pm |\widehat{p}_{sn}|) - \widehat{q}_{cn} \pm |\widehat{q}_{sn}| - \frac{p_0^2 + \|p\|^2}{8} + q_0 + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Второй результат посвящен формуле регуляризованного следа оператора H . Рассмотрим оператор со сдвигом $H_t = H(p_t, q_t)$, заданный

формулой (1), где $t \in \mathbb{T}$ и $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$. Через $\mu_n(t)$ и $\mu_{-n}^\pm(t)$ мы обозначим собственные значения оператора H_t . Кроме того, введем в рассмотрение следующую функцию

$$V = \frac{3}{2}q - \frac{5}{8}p'' - \frac{1}{4}p^2.$$

Теорема 2. Пусть p'''' , $q'' \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда имеет место следующая формула следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n(t) - \mu_n(0) + \mu_{-n}^+(t) - \mu_{-n}^+(0) + \mu_{-n}^-(t) - \mu_{-n}^-(0)) = V(0) - V(t),$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Литература

1. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса // ТМФ, **23**:1 (1975), 51-68.