РАЗВИТИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА И Б.Я. ЛЕВИНА НА ОСНОВЕ ИНВЕРСИИ

@ Э.Б. Меньшикова

algeomt@bsu.bashedu.ru

УДК 517.53, 517.574

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.55.

При изучении взаимосвязей между распределениями нулей голоморфных и целых функций с добавлением распределений полюсов для мероморфных функций и ростом этих функций важны соотношения, связывающие эти распределения с интегральными или иными характеристиками роста. Это, как правило, разнообразные интегральные формулы. Часто осложняющим фактором при использовании таких формул является присутствие в них производных, по нормали или других, от исследуемых функций. Предлагается вариант избавления от таких сложностей за счёт использования инверсии на плоскости.

Ключевые слова: мероморфная функция, распределение нулей и полюсов, субгармоническая функция, мера Рисса.

Development of integral formulas of Carleman and B.Ya. Levin on the basis of inversion

When studying the relationships between the distributions of zeros of holomorphic and entire functions with the addition of pole distributions for meromorphic functions and the growth of these functions, the relations connecting these distributions with integral or other growth characteristics are important. These are, as a rule, various integral formulas. Often a complicating factor when using such formulas is the presence in them of derivatives, normal or otherwise, of the functions under study. A variant of getting rid of such difficulties by using inversion on the plane is proposed.

Keywords: meromorphic function, distribution of zeros and poles, subharmonic function, Riesz measure

В исследованиях по теории роста целых, мероморфных, голоморфных функций f важную роль играют различные интегральные формулы, устанавливающие взаимосвязи между ростом и поведением этих функций с одной стороны и распределением их нулей и/или полюсов с другой. Среди них и классические интегральные формулы Карлемана

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90007 «Аспиранты».

Меньшикова Энже Булатовна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Enzhe Menshikova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

[1; гл. I, § 3, теорема 3.1] Menshikova:2 и Б. Я. Левина [1; гл. I, § 3, теорема 3.4]. Но в этом случае возможный осложняющий фактор для установления упомянутых взаимосвязей — присутствие в подынтегральных выражениях *частных производных u'_{rad} по радиусу в полярных координатах* для $u := \ln|f|$. Здесь мы приводим только Основную нашу теорему в субгармоническом обрамлении, из которой и получаются в [2] несколько новых интегральных формул типа Карлемана и Б. Я. Левина.

Для области D с кусочно-гладкой границей ∂D через σ_D обозначаем *меру длины на ∂D* в евклидовой метрике, а $\vec{n}_D$ — *векторы внешней нормали* к границе ∂D , существующие на ∂D всюду за исключением не более чем счётного числа точек из ∂D . Если производная по внешней нормали $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_D}$ присутствует в подынтегральном выражении для интеграла $\int_{\partial D}$ по границе ∂D , то нижний индекс D в обозначении внешней нормали $\vec{n}_D$ часто опускаем и пишем просто $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ вместо $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_D}$. Производные по внешней нормали к границам кругов $D(r) \subset \mathbb{C}$ от функции v — это обычные частные производные по радиусу в полярной системе координат и в этом случае, как и во введении, используем для них обозначение $v'_{\text{rad}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_{D(r)}}$. Через $d\lambda$ обозначаем *элемент площади на $\mathbb{C}$* . *Инверсия относительно окружности $\partial D(r)$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty$ — это конформная биекция $z \mapsto r^2/\bar{z}$, определяющая инверсию множеств $B_r^* := \{r^2/\bar{z} \mid z \in B\} \subset \mathbb{C}_\infty$ и инверсию функций $f_r^*(z) := f(r^2/\bar{z})$ для функций f на $B \subset \mathbb{C}_\infty$. Множество $B \subset \mathbb{C}_\infty$ *симметрично относительно окружности $\partial D(r)$* , если $B = B_r^*$. Через Δ обозначаем оператор Лапласа.*

Основная теорема [2] Пусть $D \neq \emptyset$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей ∂D , симметричная относительно окружности $\partial D(r)$, $S := D \cap \partial D(r) \neq \emptyset$, $\arg S := \{\theta \in [0, 2\pi) \mid re^{i\theta} \in S\} \neq \emptyset$. Если $V: \overline{D} \setminus D(r) \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, с непрерывными вторыми частными производными в области $D \setminus \overline{D}(r)$, обращающаяся в нуль на части $\partial D \setminus \overline{D}(r)$ границы ∂D , с инверсным продолжением, определяемым на $\overline{D}$ как функция

$$V_r^\odot(z) := \begin{cases} V(z) & \text{при } z \in \overline{D} \setminus D(r), \\ V_r^*(z) := V(r^2/\bar{z}) & \text{при } z \in \overline{D} \cap D(r) \end{cases},$$

то для любой разности $U \neq \pm\infty$ субгармонических на $\overline{D}$ функций с

зарядом Рисса $\frac{1}{2\pi} \triangle U$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_D V_r^\odot d\frac{1}{2\pi} \triangle U - \frac{1}{2\pi} \int_{D \setminus \partial D(r)} U \triangle V_r^\odot d\lambda \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} U \frac{\partial V_r^\odot}{\partial \vec{n}_D} d\sigma_D + \frac{r}{\pi} \int_{\arg S} U(re^{i\theta}) V'_{\text{rad}}(re^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

что для гармонической функции V на $D \setminus \overline{D}(r)$ упрощается до равенства

$$\int_D V_r^\odot d\frac{1}{2\pi} \triangle U = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} U \frac{\partial V_r^\odot}{\partial \vec{n}_D} d\sigma_D + \frac{r}{\pi} \int_{\arg S} U(re^{i\theta}) V'_{\text{rad}}(re^{i\theta}) d\theta.$$

В роли U может выступать $\ln|f|$, где $f \neq 0, \infty$ — мероморфная на $\overline{D} \setminus D(r)$ функция. Оба равенства показывают, что производные по нормали от U в этих формулах уже отсутствуют, а присутствуют со стороны функции U наряду с ней самой только её заряд Рисса $\frac{1}{2\pi} \triangle U$. Это позволяет получить новые взаимосвязи, о которых говорилось изначально в аннотации и преамбуле тезисов.

Литература

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. — Москва: Наука, 1970.
2. Меньшикова Э.Б. Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций // Известия вузов. Математика. 17 стр. (принято к печати в сентябре 2021 г.).