БЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

@ А.В. Домрин, М.А. Шумкин

domrin@mi-ras.ru, shumkin.mikhail@yandex.ru

УДК 517.984, 517.925

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.12.

Показано, что голоморфная по времени разрешимость задачи Коши для уравнения изоспектральной деформации оператора Шредингера или Дирака влечет безмонодромность начального условия. Даны количественные оценки нарушения обратной импликации для потенциалов, не принадлежащих классу Вейерштрасса, и приведены критерии безмонодромности операторов Дирака.

Ключевые слова: комплексный анализ, дифференциальные уравнения

Monodromy-free operators and soliton equations

We show that if the Cauchy problem for an isospectral deformation equation for a Schrödinger or Dirac operator has a holomorphic-in-time solution, then the initial condition is monodromy-free. We quantitatively estimate the violation of the inverse implication for potentials not in the Weierstrass class and present criteria for a Dirac operator to be monodromy-free.

Keywords: complex analysis, differential equations

Оператор Шредингера $L = \partial_x^2 + u(x)$ с потенциалом $u(x)$, мероморфным в области $D \subset \mathbb{C}$, называется *безмонодромным*, если все решения $\varphi(x)$ уравнения $L\varphi = z^2\varphi$ мероморфны в D при каждом $z \in \mathbb{C}$. Описание таких операторов в различных классах мероморфных функций $u(x)$ является традиционным вопросом спектральной теории [1] и применяется к теории ортогональных многочленов и рациональных решений уравнений типа Пенлеве (см. обзор в [2]) и вопросам локализации спектра (см. обзор в [3]).

Нас интересует связь этого понятия с решениями солитонных уравнений. Известно [4], что потенциал $u(x)$ класса Вейерштрасса (состоящего из всех эллиптических функций, рациональных функций от e^{ax} , ограниченных на ∞ , и рациональных функций от x , равных нулю на ∞) безмонодромен тогда и только тогда, когда он является стационарным

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00474).

Домрин Андрей Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия); Andrei Domrin (Moscow State University, Moscow, Russia)

Шумкин Михаил Александрович, аспирант, МГУ (Москва, Россия); Mikhail Shumkin (Moscow State University, Moscow, Russia)

(т.е. не зависящим от t) решением некоторого уравнения изоспектральной деформации $L_t = [A, L]$, где оператор $A = \partial_x^m + v_1 \partial_x^{m-2} + \dots + v_{m-1}$ таков, что коммутатор $[A, L]$ является дифференциальным оператором степени нуль, т.е. оператором умножения на некоторую функцию (это при каждом нечетном $m > 1$ задает $v_1, \dots, v_{m-1}$ почти однозначно как полиномы от функции u и ее производных по x ; например, при $m = 3$ годится $v_1 = 3u/2$ и $v_2 = 3u'/4$, что приводит к уравнению Кортевега–де Фриза $4u_t = u_{xxx} + 6uu_x$). Пользуясь [5], мы установим следующее обобщение в части необходимости.

Теорема 1. Пусть функция $u_0(x)$ мероморфна в области D и задача Коши $u(x, 0) = u_0(x)$ для уравнения $L_t = [A, L]$ имеет голоморфное по x, t решение $u(x, t)$ на $\{|x - x_0| < \varepsilon_1, |t| < \varepsilon_2\}$ для каких-либо $x_0 \in D$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Тогда оператор $L_0 = \partial_x^2 + u_0(x)$ безмонодромен.

Достаточности в общем случае нет (из безмонодромности оператора не вытекает разрешимость задачи Коши с таким начальным условием) и мы дадим количественную оценку этого явления.

Для оператора Дирака (и уравнений НУШ и мКдФ) имеет место полный аналог теоремы 1 и серия критериев безмонодромности, аналогичных широко известным условиям из [1]. Приведем типичный результат.

Теорема 2. Пусть функции $u(x), v(x)$ имеют при $x = x_0$ полюсы первого порядка. Тогда все решения $\varphi(x), \psi(x)$ системы уравнений $\varphi' = z\varphi + u\psi$, $\psi' = v\varphi - z\psi$ мероморфны в точке x_0 при каждом $z \in \mathbb{C}$ в том и только том случае, когда для некоторого натурального m имеем $u_0 v_0 = m^2$ и $u_k v_0 = (-1)^k u_0 v_k$ при $k = 1, \dots, 2m$, где u_k (v_k) — это коэффициент при $(x - x_0)^{k-1}$ ряда Лорана функции $u(x)$ ($v(x)$) с центром x_0 .

Литература

1. Duistermaat J.J., Grünbaum F.A. Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.
2. Novokshenov V.Yu. Generalized Hermite polynomials and monodromy-free Schrödinger operators // SIGMA **14** (2018). 106, 13 pages.
3. Ишкин Х.К., Ахметшина А.Д. О классе потенциалов с тривиальной монодромией // Вестник КазНУ Серия матем., мех., информ. **3**(90) (2018), 43–52.
4. Gesztesy F., Weikard R. Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies — an analytic approach // Bull. AMS **35**:4 (1998), 271–317.
5. Домрин А.В. Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. РАН Серия матем. **74**:3 (2010), 23–44.