ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

@ Н.Ф. Валеев

valeevnf@yandex.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.6.

Рассматривается новая постановка обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля (Шредингера). Основной особенностью рассматриваемых обратных спектральных задач является неполнота спектральных данных. Обратные спектральные задачи с неполными данными имеют не единственное решение и некорректны, но неполноту спектральных данных можно дополнить геометрическими условиями, которые в итоге приводят к новому классу задач. В докладе будут обсуждаться вопросы изолированности и единственности решений, а также связь этих задач с нелинейными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, нелинейные дифференциальные операторы, спектральная теория

On an inverse optimization spectral problem for Sturm-Liouville operators

Keywords: inverse spectral problems, nonlinear differential operators, spectral theory

Пусть $L(q)$ - с.с. оператор Штурма-Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0, 1),$$

и граничными условиями Дирихле (для определенности) $y(0) = y(1) = 0$, где $q \in L^p(0, 1)$, $1 < p < +\infty$.

Спектр оператора $L(q)$ состоит из собственных значений: $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots < \lambda_m(q) < \dots$

В докладе рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными в следующей постановке.

($\mathcal{P}^0$) Оптимизационная обратная спектральная задача - ООСЗ

Пусть заданы:

- (a) числа $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ - спектральные данные задачи;
- (b) вещественная функция $q_0 \in L^p(0, 1)$.

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия);
Valeev Nur (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia)

Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in L^p(0,1)$, такой, что:

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\text{и } \|q_0 - \hat{q}\|_{L^2} =$$

$$= \min\{\|q_0 - q\|_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), k = 1, 2, \dots, m; q \in L^2(0,1)\}.$$

Рассматриваемая ООСЗ ($\mathcal{P}^0$) связана с нахождением решения следующей (хорошо известной в физике) системы нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_1'' + q_0 u_1 = \lambda_1^* u_1 + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_1, \\ \vdots \\ -u_m'' + q_0 u_m = \lambda_m^* u_m + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_m, \end{array} \right.$$

subject to the zero boundary conditions

$$u_i(0) = u_i(l) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь $\sigma_i \in \{0, +1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$.

В докладе будут обсуждаться результаты об изолированности и единственности решений ООСЗ ($\mathcal{P}^0$).

Литература

1. N. F. Valeev, Y. Sh. Ilyasov On an inverse optimization spectral problem and a related nonlinear boundary value problem. // Math. Zametki, 104 (4) (2018), 621-625.
2. Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem. //arXiv preprint, arXiv:1803.01495 (2018), 1-11.
3. Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev On an inverse spectral problem and a generalized Sturm's nodal theorem for nonlinear boundary value problems. preprint arXiv: 1809.00229 (2018), 1-9
4. Ilyasov Y. Sh., Valeev N. F. On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq., 2019 266.8, 4533-4543.
5. Yavdat Ilyasov, Nur Valeev Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 426, 2021,