ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

@ М.А. Кузнецова

kuznetsovama@info.sgu.ru

УДК 517.984.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.18.

В работе получены асимптотические формулы для спектра оператора Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом. Эти формулы представляют собой полное описание класса последовательностей, являющихся спектрами рассмотренных операторов.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, замороженный аргумент, оператор Штурма–Лиувилля, необходимые и достаточные условия.

Characterizing the spectrum of the Sturm–Liouville operator with frozen argument

In this work, asymptotic formulae are obtained for the spectrum of the Sturm–Liouville operator with frozen argument. These formulae completely characterize the class of sequences being spectra of the considered operators.

Keywords: inverse spectral problems, frozen argument, Sturm–Liouville operators, necessary and sufficient conditions.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом:

$$-y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q \in L_2(0, \pi)$, и числа $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $a \in [0, \pi]$ фиксированы.

Пусть функции $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$S(a, \lambda) = 0, \quad S'(a, \lambda) = 1, \quad C(a, \lambda) = 1, \quad C'(a, \lambda) = 0.$$

Тогда собственные значения краевой задачи (1)–(2) вычисляются как нули характеристической функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} C^{(\alpha)}(0, \lambda) & C^{(\beta)}(\pi, \lambda) \\ S^{(\alpha)}(0, \lambda) & S^{(\beta)}(\pi, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Кузнецова Мария Андреевна, аспирант, СГУ (Саратов, Россия); Maria Kuznetsova (PhD student, Saratov State University, Saratov, Russia)

Спектром краевой задачи (1)–(2) называется последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, взятых с учетом алгебраической кратности.

Обратная задача 1. По спектру $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и числам α, β восстановить потенциал q .

Обратная задача 1 изучалась в работах [1–4]. В случае $a/\pi \in \mathbb{Q}$ было получено ее полное решение, включающее в себя характеристику спектра с помощью асимптотических формул (см. [1]). Неполные результаты для случая $a/\pi \notin \mathbb{Q}$ были получены в [2]. Методы, использованные в этих работах, не позволяют получить характеристику спектра в иррациональном случае. В настоящей работе предложен единый подход исследования двух случаев и дополнены известные результаты для $a/\pi \notin \mathbb{Q}$.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_\nu(x) = \begin{cases} \sin x, & \nu = 0, \\ \cos x, & \nu = 1, \end{cases} \quad z_n = n - \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda = \rho^2.$$

Используем следующую формулу (см. [2]):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (-1)^{\alpha(1-\beta)} \frac{\varphi_{|\beta-\alpha|}(\pi\rho)}{\rho^{1-\alpha-\beta}} + \\ &+ (-1)^\alpha \left(\frac{\varphi_\beta((\pi-a)\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}} \int_0^a q(t) \varphi_\alpha(t\rho) dt + \frac{\varphi_\alpha(a\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}} \int_a^\pi q(t) \varphi_\beta((\pi-t)\rho) dt \right). \end{aligned}$$

Применяя теорему Руше и разложения тригонометрических функций в окрестности 0, можно получить следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = z_n^2 + \varkappa_n \varphi_\alpha(az_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \{\varkappa_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2. \quad (3)$$

Теорема 1. Последовательность $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является спектром краевой задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда выполнены асимптотические формулы (3).

Схема доказательства достаточности. 1) Строим функцию

$$\Pi(\lambda) = (-1)^\alpha \pi^{\delta(\alpha, \beta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\xi_k}, \quad \xi_k := \begin{cases} \xi_k = z_k^2, & k \geq 2 \text{ или } \alpha + \beta < 2; \\ \xi_k = 1, & k = 1 \text{ и } \alpha = \beta = 1. \end{cases}$$

2) С помощью [1, лемма 6] и леммы Шварца докажем, что

$$\{z_n^{2-\alpha-\beta} \Pi(z_n^2) / \varphi_\alpha(az_n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \Omega} \in l_2,$$

где $\Omega = \{k \in \mathbb{N} : \varphi_\alpha(az_k) = 0\}$.

3) Существует функция $q \in L_2(0, \pi)$, коэффициенты которой по базису $\{\varphi_\alpha(tz_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют равенствам

$$\int_0^\pi q(t) \varphi_\alpha(tz_n) dt = \frac{(-1)^{n+1-\alpha} \Pi(z_n^2)}{\varphi_\alpha(z_n a)} z_n^{2-\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \Omega.$$

4) Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристическая функция краевой задачи (1)–(2) с построенным q . Тогда функция $F(\lambda) = \rho^{1-\alpha-\beta}(\Delta(\lambda) - \Pi(\lambda)) / \varphi_{|\alpha-\beta|}(\pi\rho)$ целая по λ , и справедливы оценки $F(\lambda) = o(1)$. По теореме Лиувилля $F(\lambda) \equiv 0$, то есть $\Pi(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$.

Литература

1. Buterin S., Kuznetsova M. On the inverse problem for Sturm-Liouville-type operators with frozen argument: rational case // Comput. Appl. Math., **39**:1 (2020), article 5.
2. Wang Y.P. et al. Reconstruction for Sturm-Liouville operators with frozen argument for irrational cases // Appl. Math. Lett., **111** (2021), article 106590.
3. Tsai T.-M. et al. Sturm-Liouville-type operators with frozen argument and Chebyshev polynomials [Электронный ресурс] // arXiv.org (2021), arXiv:2106.03525 [math.SP].
4. Bondarenko N.P. Finite-difference approximation of the inverse Sturm-Liouville problem with frozen argument [Электронный ресурс] // arXiv:2108.10578 [math.NA].