КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦЫ РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ

@ С.Р. Насыров

semen.nasyrov@yandex.ru, snasyrov@kpfu.ru

УДК 517.54

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.58.

Установлена оценка коэффициента квазиконформного отражения относительно границы равнобедренной трапеции в терминах эллиптических функций и геометрических параметров трапеции.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, квазиконформное отражение, эллиптические интегралы.

Quasiconformal reflection with respect to isosceles trapezoidal polygon

We establish an estimation for the coefficient of quasiconformal reflection with respect to an isosceles trapezoidal polygon in terms of elliptic functions and geometric parameters of the polygon.

Keywords: quasiconformal mapping, quasiconformal reflection, elliptic functions.

Напомним, что квазиокружностью на плоскости называется замкнутая жорданова кривая, которая является образом окружности при некотором квазиконформном автоморфизме плоскости. Кривая L является квазиокружностью тогда и только тогда, когда существует квазиконформное отображение g сферы Римана на себя, которое меняет ориентацию и оставляет точки L на месте, т. е. удовлетворяет условию $g(z) = z$, $z \in L$. Если g является K -квазиконформным отображением, то отображение g называют K -квазиконформным отражением относительно кривой L .

Важной задачей является определение по заданной кривой L минимального значения K такого, что существует K -квазиконформное отражение относительно кривой L ; обозначим такое значение через K_L . Данная проблема весьма трудна и остается открытой даже для достаточно простых кривых, например, для четырехугольников (см. [1], [2]). Даже в случае, когда L является границей прямоугольника $[0, a] \times [0, 1]$, $a \geq 1$, не удастся описать значение этой константы для всех значений a .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Насыров Семен Рафаилович, д.ф.-м.н., профессор, КФУ (Казань, Россия); Semen Nasyrov (Kazan Federal University, Kazan, Russia).

Известно только, что при $1 \leq a < 1.037$ значение $K_L = 3$, а при $a > 2.76$ имеем $K_L > 3$. Кроме того, при $a > 1$ справедлива оценка $\frac{\pi}{4}a < K_L < \pi a$ (см. [1]).

Мы получаем оценку снизу для величины K_L в случае, когда L является границей равнобедренной трапеции.

Пусть $\mathcal{K}(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и

$$g(\lambda) = \lambda \mathcal{K}(\lambda') / \mathcal{K}(\lambda), \quad \text{где } \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Нетрудно показать, что функция $g(\lambda)$ имеет единственную точку максимума $\lambda = \lambda_0 = 0.7373921 \dots$, которая является решением уравнения $(\lambda')^2 \mathcal{K}(\lambda) \mathcal{K}(\lambda') = \pi/2$ на интервале $(0, 1)$. При этом, $g(\lambda_0) = 0.708434 \dots$

Обозначим

$$C(\alpha) = \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi\alpha)/4} - \operatorname{tg}(\pi\alpha)/2 \right)^2, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Теорема. Пусть L — граница равнобедренной трапеции с длинами оснований c и d , $c < d$, высота которой равна 1, а острый угол равен $\pi\alpha$.

1) Если $\frac{c}{d} \geq \lambda_0$, то

$$K_L \geq g(\lambda_0)(1 + C(\alpha))d.$$

2) Если $\frac{c}{d} < \lambda_0$, то

$$K_L \geq g(\lambda)(1 + C(\alpha))d, \quad \text{где } \lambda = c/d.$$

Теорема получена в результате совместных исследований с проф. М. Вуориненом.

Литература

1. Kühnau R. Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. Jahresber. d. Deutschen Math. **90** (1988), 90-109.
2. Kruskal S. Quasiconformal Extensions and Reflections. In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory (Ed. by R. Kühnau). Amsterdam: Elsevier, NorthHolland, 2005, Vol. 2. — 507-553.
3. Werner S. Spiegelungskoeffizient und Fredholmscher Eigenwert für gewisse Polygone // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, Math. **22** (1997), 165-186.