О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

@ С.А. Бутерин, Н. Джурич

buterinsa@info.sgu.ru, nebojsa.djuric@aggf.unibl.org

УДК 517.984

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.5.

Приводится краткий обзор результатов по обратной задаче Штурма–Лиувилля с постоянным запаздыванием, включая недавно установленную неединственность решения при малом запаздывании.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, функционально-дифференциальный оператор, запаздывание.

On non-uniqueness of solution for the inverse Sturm–Liouville problem with delay

We give a brief survey of results for the inverse Sturm–Liouville problem with constant delay including recently established non-uniqueness of the solution for small values of the delay.

Keywords: inverse spectral problem, functional-differential operator, delay.

Зафиксируем $\nu \in \{0, 1\}$ и обозначим через $\{\lambda_{n,j}\}$ спектр краевой задачи

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y^{(\nu)}(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad (1)$$

где $a \in [0, \pi)$, $q(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2(0, \pi)$, такая что $q(x) = 0$ п.в. на $(0, a)$, а $j \in \{0, 1\}$. Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По спектрам $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$ найти потенциал $q(x)$.

При $a = 0$ задача 1 является классической обратной задачей Штурма–Лиувилля [1], решение которой, как известно, единственно. В дальнейшем появился интерес к нелокальному случаю $a > 0$, для которого основные методы теории обратных задач неприменимы (см. [2–11] и ссылки в них).

Как стало известно авторам, в 1979 году данный тип задач был предложен профессором В.А. Садовничим югославскому математику М. Пиккле, проходившему стажировку в Москве. Впоследствии на территории

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Бутерин Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия); Sergey Buterin (Saratov State University, Saratov, Russia)

Джурич Нейбойша, Университет Баня-Лука (Баня-Лука, Босния и Герцеговина); Nebojša Djurić (University of Banja Luka, Bosnia and Herzegovina)

бывшей Югославии образовалась научная школа по задачам с запаздыванием.

Давно установлено, что при $a \in [\pi/2, \pi)$ решение задачи 1 также единственно. При $a < \pi/2$ зависимость характеристической функции краевой задачи (1) от $q(x)$ становится нелинейной, и вопрос единственности решения обратной задачи в этом случае долгое время оставался основной интригой теории обратных задач для операторов с точечным запаздыванием.

Данный вопрос был решен положительно для $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ в [4] при $\nu = 0$ и независимо в [6] при $\nu = 1$. Для $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ и $\nu = 0$ в [5] было показано, что задание обоих спектров однозначно определяет $q(x)$ на $(a, 3a/2) \cup (\pi - a/2, \pi)$, что справедливо и при $\nu = 1$. Однако наиболее сильная теорема единственности была получена в [7], где было установлено, что при $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ функция $q(x)$ однозначно определяется на объединении интервалов $I_1 := (a, 3a/2) \cup (\pi - a, 2a) \cup (\pi - a/2, \pi)$.

Среди специалистов долгое время сохранялись ожидания, что при всех $a > 0$ должна иметь место и полная единственность, которая обеспечила бы преемственность с классическим результатом Г. Борга [1] для $a = 0$.

Однако в недавней работе [8] был получен отрицательный ответ для $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ при $\nu = 0$. А именно, удалось построить бесконечные семейства так называемых изобиспектральных потенциалов $q_\alpha(x)$, т.е. которым соответствует одна и та же пара спектров $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$. Также было дано исчерпывающее обоснование, почему идея этого контрпримера, вообще говоря, не переносится на случай $\nu = 1$, который оказался труднее.

Интересно отметить, что построенные потенциалы различаются на дополнении I_1 , то есть теорема единственности в [7] оказалась неулучшаемой.

В [9] вопрос для $\nu = 1$ был сведен к нахождению интегрального оператора специального вида, обладающего собственной функцией с нулевым средним, но соответствующей ненулевому собственному значению. Необходимый контрпример был построен в результате серии вычислительных экспериментов, один из которых случайно дал аналитическую реализацию.

Однако работы [8, 9] оставили без внимания наиболее трудный случай малого запаздывания $a \in (0, \pi/3)$, позволяющего сколь угодно приблизиться к классической ситуации $a = 0$, когда имеет место единственность.

Отрицательный ответ и для всех $a \in (0, \pi/3)$ был получен в работе [11] при обоих значениях $\nu = 0, 1$. Таким образом, вопрос единственности

решения задачи 1 оказался полностью закрыт для всех $a \in (0, \pi)$ и $\nu = 0, 1$.

В последнее время активно изучаются и другие аспекты теории обратных задач для операторов с запаздыванием, включая характеристизацию спектров, а также операторы с несколькими запаздываниями и функционально-дифференциальные пучки (см. [10] и библиографию там).

Литература

1. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math., **78** (1946), 1-96.
2. *Pikula M.* Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra // Mat. Vestnik, **43**:3-4 (1991), 159-171.
3. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay // Appl. Math. Lett., **25** (2012), 1999-2004.
4. *Bondarenko N., Yurko V.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Appl. Math. Lett., **83** (2018), 140-144.
5. *Bondarenko N., Yurko V.* Partial inverse problems for the Sturm–Liouville equation with deviating argument // Math. Meth. Appl. Sci., **41** (2018), 8350-8354.
6. *Pikula M., Vladičić V., Vojvodić B.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions // Results Math., **74** (2019), Art. No. 45.
7. *Djurić N., Vladičić V.* Incomplete inverse problem for Sturm–Liouville type differential equation with constant delay // Results Math., **74** (2019), Art. No. 161.
8. *Djurić N., Buterin S.* On an open question in recovering Sturm–Liouville-type operators with delay // Appl. Math. Lett., **113** (2021), Art. No. 106862.
9. *Djurić N., Buterin S.* On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay // CNSNS, **102** (2021), Art. No. 105900.
10. *Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T.* An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays // Appl. Math. Comp., **411** (2021), Art. No. 126475.
11. *Djurić N., Buterin S.* Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay // NA: Real World Appl., **63** (2022), Art. No. 103390.