СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

@ А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов

akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.69.

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение и выведена формула обращения. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением.

Ключевые слова: Слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция, возмущение.

Weakly ill-posed problems of integral geometry in the plane with perturbation

In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. Further, the corresponding problem of integral geometry with perturbation is considered.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, perturbation.

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в полосе с весовой функцией нового вида. Доказана теорема единственности и теорема существование решения задачи. Показано, что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в Соболевских пространствах.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Akram Begmatov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, аспирант, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Мы используем определение задачи интегральной геометрии, данное в работе [1]. Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым [2]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [3].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [4-6].

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$x \in R^2, \quad \xi \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1, \quad R_+^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \geq 0\};$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 \in [0, l],$$

здесь $0 < l < \infty$.

Постановка задачи 1. В полосе Ω рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \quad 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

Задача 1 является задачей интегральной геометрии вольтеровского типа. Такие задачи на линейных многообразиях и других явно заданных кривых и поверхностях имеют многочисленные приложения в компьютерной, сейсмической и ультразвуковой томографии.

Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы Ω известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1 - \sqrt{x_2}}^{x_1 + \sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2) d\xi_1 = f(x_1, x_2),$$

где

$$g(x_1, \xi_1) = x_1 - \xi_1.$$

Постановка задачи 2. Восстановить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если в полосе Ω известны суммы интегралов от нее вида

$$\int_{P(x_1, x_2)} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \int_0^{x_2} \int_{x_1 - h}^{x_1 + h} K(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1, x_2),$$

где $h = \sqrt{x_2 - \xi_2}$.

Задача 2 является задачей интегральной геометрии с возмущением.

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. - 702 с.
2. *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. *Бегматов Акр.Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. № 2. С. 243-247.
4. *Бегматов Акр.Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 151-153.
5. *Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type.// Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. P. 113-120.
6. *Begmatov, A.Kh., Ismoilov, A.S.* Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2020, 3(2), 246-254.