ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ОЦЕНКИ ЦЕЛОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

@ Г.А. Гайсина

gaisinaga@mail.ru

УДК 517.53

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.42.

Изучается задача о представлении аналитических в полуплоскости функций рядами экспонент с учетом заданной выпуклой мажоранты роста, не ограниченной в окрестности нуля. Методы оценок основаны на свойствах преобразований Лежандра.

Ключевые слова: ряды экспонент, целая функция, выпуклая мажоранта

Representation of analytic functions by series of exponentials on a half-plane with a given estimate of entire component

We study the problem of representing analytic in a half-plane functions by exponential series taking into account a given convex majorant of growth that is not bounded in a neighborhood of zero. The estimation methods are based on the properties of the Legendre transformations.

Keywords: series of exponentials, entire function, convex majorant

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий общий результат А.Ф. Леонтьева (см. [1]): для любой ограниченной выпуклой области D найдется последовательность комплексных чисел λ_n , зависящая только от данной области, такая, что любую функцию F , аналитическую в D , можно разложить в ряд экспонент $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость равномерная на компактах из D). Позже подобный результат был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка ρ в выпуклом многоугольнике. При этом было показано, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|$ имеет ту же оценку сверху, что и исходная функция F (см. [2]).

Р.С. Юлмухаметовым этот результат при $\rho > 1$ доказан для произвольной ограниченной выпуклой области (см. [3]).

В [4] приведенный выше результат из [2] был перенес на случай, когда D — полуплоскость $\Pi_0 = \{z = x + iy: x > 0\}$, а в статье [5] получен и более общий результат, а именно: пусть функция F регулярна в Π_0 ,

Гайсина Галия Ахтяровна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Galiya Gaisina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\{z = x + iy: x \geq s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$, причем

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} z = s > 0} |F(z)| |dz| \leq A_F H(s),$$

где H — убывающая на $(0, \infty)$ функция, $H(s) \uparrow \infty$, $s^k H(s) \rightarrow 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $s \rightarrow 0$, а функции $m(s) = \ln H(s)$ ($s > 0$) и $m(e^{-t})$ ($t \in \mathbb{R}$) выпуклы.

Тогда существуют $\lambda_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^q} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, $q > 1$ — любое, такие, что в полуплоскости Π_0

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \Phi(z), \quad (1)$$

где Φ — некоторая целая функция. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \leq C H^p \left(\frac{x}{p} \right),$$

$0 < C < \infty$, $p \in \mathbb{N}$.

Возникает естественный вопрос о поведении целой функции Φ в окрестности мнимой оси. Нами получен ответ на этот вопрос в одном важном частном случае.

Теорема 1. Пусть F — четная функция, аналитическая вне отрезка $[-ai, ai]$ и удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы из [5]. Если мажоранта H удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона

$$\int_0^b \ln \ln H(x) dx < \infty, \quad H(b) = e,$$

то целая функция Φ из представления (1) ограничена в полосе $\{z = x + iy: |x| \leq 1\}$.

Эта теорема выводится из теоремы Карлемана–Бёрлинг–Левинсона–Шёберга–Волфа–Домара (см. [6]).

Литература

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем., **44**:6 (1980), 1308–1318.
3. Юлмухаметов Р. С. Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // Доклады АН СССР, **264**:4 (1982), 839–841.

4. *Гайсин А.М.* Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности. Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1982, Уфа.

5. *Гайсина Г.А.* Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста // Уфимский матем. журнал, **13**:3 (2021), 1–9 (статья находится в печати).

6. *Borichev A., Hedelmalm H.* Completeness of translates in weighted spaces on the half-plane // Acta Mathematica, **174**:1 (1995), 1–84.