ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА МОРЕРЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ШАРЕ

@ Б.Ж. Кутлымуратов

bayko-2020@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.48.

В работе рассмотрены граничная теорема Мореры для интегрируемых функции в неограниченной реализации шаре.

Ключевые слова: интегрируемые функции, голоморфное продолжение, автоморфизм единичного шара, аналитический диск.

Morera's boundary theorem for integrable functions in an unbounded realization of a ball

The paper considers Morera's boundary theorem for integrable functions in an unbounded realization of a ball.

Keywords: integrable functions, holomorphic continuation, unit ball automorphism, analytic disc.

Пусть D неограниченная область в $\mathbb{C}^{n+1}$ вида

$$D = \left\{ (z, \omega) = (z, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^{1+n} : \operatorname{Im} z > |\omega|^2 \right\}.$$

Ее граница называется сферой Пуанкаре ([3],[5]):

$$\partial D = \left\{ (\varsigma, \eta) \in \mathbb{C}^{1+n} : \operatorname{Im} \varsigma = |\eta|^2 \right\}.$$

Мера Лебега на ∂D записывается следующим образом:

$$d\mu(\varsigma, \eta) = \left(-\frac{i}{2} \right)^n d\varsigma_1 \wedge d\eta \wedge d\bar{\eta},$$

где $\varsigma_1 = \operatorname{Re} \varsigma$, $d\eta = d\eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge \dots \wedge d\eta_n$, $d\bar{\eta} = d\bar{\eta}_1 \wedge d\bar{\eta}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{\eta}_n$. Обозначим через G единичный шар в $\mathbb{C}^{n+1}$

$$G = \left\{ (u, \nu) = (u, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^{1+n} : |u|^2 + |\nu|^2 < 1 \right\}$$

Кутлымуратов Баймурат Жиенбаевич, докторант (Phd) кафедры Методика преподавания математики НГПИ. им. Ажинияза (Нукус, Узбекистан); Kutlimuratov Baymurat (Nukus State Pedagogical Institute, Nukus, Uzbekistan)

а через S его границу

$$S = \{(u, \nu) \in \mathbb{C}^{1+n} : |u|^2 + |\nu|^2 = 1\}$$

Через $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1})$ обозначим преобразование $C_{(u, \nu)}^{n+1} \rightarrow C_{(z, \omega)}^{1+n}$, где

$$z = \varphi_1 = \frac{i(1-u)}{1+u}, \quad \omega = \varphi_k = \frac{\nu}{1+u}, \quad (k = 2, \dots, n), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$$

Отображение φ является биголоморфизмом шара G на область D . ([4]) Как известно, автоморфизм φ_α единичного шара G , переставляющие точки a и $0 = (0, 0, \dots, 0)$ имеет явный вид (см. напр. [2]):

$$\varphi_\alpha(u, \nu) = \frac{a - (u\bar{a} + \langle \nu, \bar{a} \rangle) \frac{a}{|a|^2} - \sqrt{1 - |a|^2} \left((u, \nu) - (u\bar{a} + \langle \nu, \bar{a} \rangle) \frac{a}{|a|^2} \right)}{1 - u\bar{a} - \langle \nu, \bar{a} \rangle}$$

где $\langle \nu, \bar{a} \rangle = \nu_1 \bar{a}_1 + \dots + \nu_n \bar{a}_n$. Используя отображения φ и φ_α мы можем, выписать автоморфизм области D , переводящий точку $b = \varphi(a)$ в точку $I = (i, 0, \dots, 0)$, в виде композиций:

$$\psi_b = \varphi \circ \varphi_a \circ \varphi^{-1}.$$

Если φ_U -унитарное преобразование единичного шара G , сохраняющий точку $0 = (0, \dots, 0)$, то $\psi_U = \varphi \circ \varphi_U \circ \varphi^{-1}$ определяет унитарное преобразование области D , сохраняющий точку $i = (i, 0, \dots, 0)$. Пусть ψ произвольный автоморфизм, области D и $\psi(I) = b$. Тогда существует унитарное преобразование ψ_U области D , для которого

$$\psi_b = \psi_U \circ \psi^{-1}$$

Рассмотрим следующее вложение круга Δ в область D :

$$\{\xi_t \in \mathbb{C}^n : \xi_t = \varphi(t\varphi^{-1}(\lambda^0)), t \in \Delta\}, \quad (1)$$

где λ^0 – фиксированная точка из ∂D . Если ψ -произвольный автоморфизм области D , то множество (1) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей ∂D .

Теорема 1. Пусть $f \in L^p(\partial D)$. Если для функции f выполнена условие

$$\int_T f(\psi(\xi_t)) dt = 0$$

(здесь T — осто́в области D) для всех автоморфизмов ψ области D и фиксированного $\lambda^0 \in \partial D$, то функция f голоморфно продолжается в область D .

Литература

1. *Хуа Ло-Кен*. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: 1959 г.
2. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из. М.: Мир, 1984 г.
3. *Мысливец С.Г.* Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре. //Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Сб. научных трудов. Красноярск, КрасГУ, 2000.ст.97-102.
4. *Курбанов Б.Т.* Теорема Морера для-некоторых неограниченных областей. //ДАН Руз. 2001. N 8-9. ст.9-11.
5. *Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б.Ж.* Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре для интегрируемых функции.//Узбекский матем. журнал. 2010, N 4. ст. 185-195