ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

@ А.М. Савчук, И.В. Садовнича

savchuk@cosmos.msu.ru, ivsad@yandex.ru

УДК 517.984.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.28.

Рассматривается одномерная система Дирака с суммируемым потенциалом P . Изучается вопрос скорости равномерной равносходимости спектральных разложений произвольной функции $f \in L_\infty$ в зависимости от гладкости потенциала. А именно, рассматривается случай $P \in B_{1,\infty}^\theta$ — пространство Бесова, где $\theta \in (0, 1)$.

Ключевые слова: математика, дифференциальные операторы, спектральная теория, равносходимость.

Estimates of the equiconvergence rate of spectral decompositions for a one-dimensional Dirac system.

One-dimensional Dirac system with a summable potential P is considered. For arbitrary $f \in L_\infty$ we study the problem of the rate of uniform equiconvergence of spectral decompositions. Namely, we consider the case $P \in B_{1,\infty}^\theta$ — the Besov space, with $\theta \in (0, 1)$.

Keywords: mathematics, differential operators, spectral theory, equiconvergence.

Рассмотрим систему вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве

$$L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi] \ni \mathbf{y}.$$

Функции p_j , $j = 1, 2, 3, 4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, \pi]$ и комплекснозначными. Оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in AC[0, \pi] : \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}, U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix},$$

Савчук Артем Маркович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Artem Savchuk (Moscow State University, Moscow, Russia)

Садовнича Инна Викторовна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Inna Sadovnichaya (Moscow State University, Moscow, Russia)

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i -го и j -го столбца матрицы $\mathcal{U}$. Краевое условие, определенное формой U , называется *регулярным* (по Биркгофу), если

$$J_{14} \cdot J_{23} \neq 0.$$

Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием U (т.е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U})$), будем называть *регулярным*.

Хорошо известно (см.[1]), что такой оператор имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, расположенный в горизонтальной полосе. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ систему собственных и присоединенных функций, а через $\{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — биортогональную систему. Спектральным разложением функции $\mathbf{f}$ по системе $\{\mathbf{y}_n\}$ будем называть предел сумм

$$S_m(\mathbf{f}; P) = \sum_{|n| \leq m} (\mathbf{f}, \mathbf{w}_n) \mathbf{y}_n.$$

Пространство Бесова $B_{1,\infty}^\theta$, $\theta \in (0, 1)$, определим как пространство $L_1[0, \pi]$ функций, для которых

$$\int_0^\pi |f(x+h) - f(x)| dx \leq Ch^\theta.$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f} \in L_\infty[0, \pi]$, $P_1, P_2 \in B_{1,\infty}^\theta[0, \pi]$. Тогда

$$\|S_m(\mathbf{f}; P_1) - S_m(\mathbf{f}; P_2)\|_{L_\infty} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L_\infty} m^{-\theta}, \quad (1)$$

где $C = C(P_1, P_2, U)$.

Литература

1. Савчук А.М., Садовничая И.В. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями // Современная математика. Фундаментальные направления. — т. 66, No 3, 2020. — 373-530.