КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КЛАССА E

@ Р.А. Гайсин

rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.41.

Исследуются задачи о построении регулярной мажоранты последовательностей $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ чисел $\mu_n \geq 0$, являющихся коэффициентами разложения в ряд Тейлора целых трансцендентных функций минимального экспоненциального типа. В терминах билогарифмического условия Левинсона доказан новый критерий существования регулярных минорант присоединенных последовательностей $M = \{\mu_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ расширенной полупрямой $(0, +\infty]$.

Ключевые слова: целая функция, билогарифмическое условие Левинсона, регулярные последовательности, преобразование Лежандра

Criterion of existance of the special regular majorant for the sequence in the class E

We investigate problems of construction of the regular majorant of sequences $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mu_n \geq 0$, which are Taylor's coefficients of entire transcendence functions of minimal exponential type. We have proved new criterion of existance of regular minorants of associated sequences $M = \{\mu_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ on the extended half-line $(0, +\infty]$.

Keywords: entire function, bilogarithmic Levinson condition, regular sequences, Legendre transform

Пусть E — класс последовательностей $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел μ_n , представляющих собой тейлоровские коэффициенты всевозможных целых функций минимального экспоненциального типа

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n, \quad (1)$$

отличных от многочлена. Это означает, что бесконечно много $\mu_n \in \mu$ отлично от нуля, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mu_n n!} = 0.$$

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

Пусть $M = \{M_n\}_{n=0}^\infty$ — присоединенная последовательность, т.е. $M = \{M_n \in (0, +\infty] : M_n = \mu_n^{-1}\}$. Ясно, что среди M_n бесконечно много конечных. Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что $\mu_0 = 1$.

В работах [1], [2] получены некоторые критерии существования регулярной миноранты $\{M_n^*\}$ для $\{M_n\}$, не удовлетворяющей известному условию Банга. Оказывается, эти условия допускают другую интерпретацию.

Здесь получено одно двойственное утверждение в терминах интеграла Лапласа максимального члена ряда (1).

Последовательность $\mu \in E$ назовем *слабо регулярной (регулярной)*, если присоединенная последовательность M слабо регулярна (регулярна) (см. [2]).

Ставится следующая задача: найти критерий того, чтобы последовательность $\mu = \{\mu_n\}$ из E допускала регулярную мажоранту $\mu^* = \{\mu_n^*\}$, такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n+1}^*}{\mu_n^*} < \infty. \quad (2)$$

Пусть

$$T(r) = \max_{n \geq 0} \{\mu_n r^n\} \quad (3)$$

— максимальный член ряда (1).

Теорема 1. *Последовательность $\mu \in E$ имеет регулярную мажоранту μ^* , удовлетворяющую условию (2) тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

$$1) \int_0^{p_F} \ln \ln H_F(\delta) d\delta < \infty; \quad 2) \int_0^{p_T} \ln \ln H_T(\delta) d\delta < \infty.$$

Здесь H_F и H_T — преобразования Лапласа функций (1) и (3).

Доказательство основано на свойствах преобразования Лежандра.

Укажем одно применение данной теоремы к вопросам квазианалитичности и полноты систем экспонент.

Рассмотрим специальный случай, когда $\mu_n = M_n^{-1}$ являются модулями тейлоровских коэффициентов четной целой функции экспоненциального типа

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} z^{2n}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (4)$$

т.е. $\mu_{2n} = a_{2n}$, $\mu_{2n+1} = 0$.

Следствие. Пусть γ — дуга, полученная от дуги Γ ограниченного наклона путем некоторого поворота вокруг одного ее концов и сдвига. Положим

$$H_T(\delta) = \int_0^{\infty} T(r)e^{-r\delta} dr \quad (\delta > 0), \quad L_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{H_T(\delta)\delta^{n+1}} \quad (n \geq 0),$$

где $T = T(r)$ — максимальный член ряда (4).

Для того, чтобы $C_{00}(L_{n-3}; \gamma) \neq \{\emptyset\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция H_T удовлетворяла билогарифмическому условию Левинсона (определения см. в [3]).

Таким образом, следствие является критерием нетривиальности подкласса $C_{00}(L_{n-3}; \gamma)$ класса Сиддики $C_{00}(M_{n-2}^c; \gamma)$.

Достаточность следствия доказана в [3]. Необходимость вытекает из теоремы 1.

Литература

1. Гайсин Р.А. Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблума для областей общего вида // Уфимский матем. журнал, **5:3** (2013), 28-40.
2. Гайсин Р.А. Регуляризация последовательностей в смысле Е.М. Дынькина // Уфимский матем. журнал, **7:2** (2015), 66-72.
3. Гайсин А.М., Кинзябулатов И.Г. Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения // Матем. сб., **199:7** (2008), 41-62.