КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В КЛАССЕ C^1 – ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

@ Е.А. Мазепа, Д.К. Рябошлыкова
elena.mazepa@volsu.ru, daria_ryaboshlikova@volsu.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.75.

В настоящей работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии. Вводится понятие эквивалентности в классе непрерывно дифференцируемых функций на некомпактном римановом многообразии относительно некоторой нормы в этом пространстве. Также устанавливается взаимосвязь между существованием решений стационарного уравнения Шредингера на M и вне некоторого компактного подмножества $B \subset M$ в заданном классе эквивалентных функций.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, некомпактное риманово многообразие, краевая задача, классы эквивалентных функций.

Boundary value problems for the stationary Schrodinger equation in the class of C^1 – equivalent functions on Riemannian manifolds

In the present work we study solutions of the stationary Schrodinger equation on a non-compact Riemannian manifold. We introduce the concept of equivalence in the class of continuously differentiable functions on a non-compact Riemannian manifold with respect to a certain norm in this space. Also we establish the interrelation between problems of existence of solutions of the Schrodinger equation on M and off some compact in a given class of equivalent functions.

Keywords: Schrodinger equation, non-compact Riemannian manifold, boundary value problem, classes of equivalent functions.

В работе изучаются некоторые краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0 \quad (1)$$

в классе C^1 – эквивалентных функций на произвольном гладком связном некомпактном римановом многообразии M . Здесь $c(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ –

Мазепа Елена Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, ВолГУ (Волгоград, Россия); Elena Mazepa (Volgograd State University, Volgograd, Russia)

Рябошлыкова Дарья Константиновна, ассистент, ВолГУ (Волгоград, Россия); Daria Ryaboshlikova (Volgograd State University, Volgograd, Russia)

неотрицательная на M функция, $G \subset \subset M$, $0 < \alpha \leq 1$. Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $u \in C^2(G)$, удовлетворяющую этому уравнению на каждом компактном подмножестве $G \subset \subset M$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывно дифференцируемые на M функции, а $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ – гладкое исчерпание многообразия M , т.е. последовательность непустых предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\bar{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$.

Определение 1. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются C^1 - эквивалентными на M , и использовать обозначение $f_1 \stackrel{C^1}{\sim} f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ многообразия M выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^1(M \setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^1(G)} = \sup_G |f(x)| + \sup_G |\nabla f|$.

Очевидно, что отношение $\ll \stackrel{C^1}{\sim} \gg$ является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания многообразия и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности. Обозначим класс C^1 - эквивалентных f функций $[f]_{C^1}$.

Определение 2. Будем говорить, что для уравнения (1) на M разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_{C^1}$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]_{C^1}$.

Пусть $B \subset M$ – произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k .

Определение 3. Будем говорить, что для уравнения (1) на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_{C^1}$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]_{C^1}$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ – исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k . Обозначим через v_k решение уравнения (1) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ сходится на $M \setminus B$ к решению уравнения (1):

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k, \quad 0 < v \leq 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

При этом функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^\infty$.

Функцию v будем называть L -потенциалом компакта B относительно многообразия M .

Определение 4. Многообразие M будем называть L_{C^1} -строгим многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует L -потенциал v такой, что $v \in [0]_{C^1}$.

Сформулируем основные результаты, которые являются аналогами теорем Е.А. Мазепы из работы [1] в классе C^1 – эквивалентных функций.

Теорема 1. Пусть на $M \setminus V$ для любой постоянной A существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]_{C^1}$ и $u|_{\partial V} = A|_{\partial V}$. Тогда на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.

Следствие 3. Пусть на $M \setminus V$ для любой непрерывной на ∂V функции $\Phi(x)$ для уравнения (1) разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_{C^1}$. Тогда на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.

Теорема 2. Пусть на L_{C^1} -строгом многообразии M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_{C^1}$. Тогда на $M \setminus V$ для любой непрерывной на ∂V функции $\Phi(x)$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из того же класса.

Литература

1. Мазепа Е.А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журнал., **43:3** (2002), 591-599.