О СВОЙСТВАХ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПЛОСКИХ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА

@ Е.Г. Родикова

evheny@yandex.ru

УДК 517.53

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.60.

В работе получено необходимое и достаточное условие на нули аналитических функций из плоских классов И. И. Привалова в круге, расположенные в углах Штольца.

Ключевые слова: аналитическая функция, нули, плоский класс Привалова, угол Штольца, единичный круг.

On the properties of zero sets of functions from the Privalov classes by area

In this paper we obtain a necessary and sufficient condition for zeros of analytic functions from area Privalov classes in a disk located at the Stolz angles.

Keywords: analytic function, zeros, the Privalov class by area, the Stolz angles, unit disk.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D , Z_f - множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = \text{card}\{z_k : |z_k| < r\}$ для любого $0 \leq r < 1$. При всех $0 < q < +\infty$ введем в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны, входящим в шкалу классов Неванлинны-Джрбашяна (см. [1]).

Задачи характеристики корней множеств аналитических функций из различных классов неоднократно поднимались специалистами в области комплексного анализа. В частности, в работах автора [3]-[6], [9]. Данная работа посвящена исследованию нулевых множеств плоского класса И.И. Привалова в круге.

Родикова Евгения Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, БГУ имени акад. И.Г. Петровского (Брянск, Россия); Eugenia Rodikova (Bryansk State University named after Acad. I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia)

При всех $0 < q < +\infty$ и $\alpha > -1$ рассмотрим также классы S_α^q (см. [7]):

$$S_\alpha^q = \left\{ \int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^q dr < +\infty \right\}.$$

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_q &\subset S_0^q \text{ при } q > 1, \\ \tilde{P}_q &\supset S_0^q \text{ при } 0 < q < 1. \end{aligned}$$

Из результатов Ф.А. Шамомяна, полученных для классов S_α^q , следует

Теорема 1. Пусть $\{z_k\} \subset D$. Если $\{z_k\} = Z_f$ для некоторой $f \in \tilde{P}_q$ ($q > 1$), то

$$\int_0^1 (1-r)^q n^q(r) dr < +\infty.$$

Вопрос о полной характеристизации корневых множеств функций из классов $\tilde{P}_q$ ($0 < q < 1$) остаётся открытым. В данной заметке нами получено описание множества нулей функций из класса $\tilde{P}_q$ ($0 < q < 1$), расположенных в углах Штольца. Напомним определение:

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\{z_k\} \subset D$. Если $\{z_k\} = Z_f$ для некоторой $f \in \tilde{P}_q$ ($0 < q < 1$), то

$$\int_0^1 (1-r)n^q(r)dr < +\infty. \quad (1)$$

Обратно, если точки последовательности $\{z_k\}$ расположены в конечном числе углов Штольца и удовлетворяют условию (1), то можно построить функцию $g \in \tilde{P}_q$ ($0 < q < 1$), такую что $Z_g = \{z_k\}$.

Отметим, что аналогичное утверждение для известных классов И.И. Привалова в круге (см. [2]) получено в работе [8] (см. также [6]).

Литература

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.
2. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций — М.: Изд. МГУ, 1941. — 206 с.

3. Родикова Е.Г. Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций // Сиб. электрон. матем. известия. — 2014. — С. 52-63.

4. Родикова Е.Г. О свойствах нулей функций из классов И.И. Привалова в круге // Ученые записки Брянского госуд. ун-та. — 2019. — №4. — С. 19–22.

5. Родикова Е.Г. О некоторых оценках в классе И.И. Привалова по площади // Междунар. научн. конф. «Уфимская осенняя матем. школа - 2020»: сборник тезисов – Уфа: Аэтерна, 2020. – С. 149-151.

6. Родикова Е.Г. О нулях аналитических функций из классов И.И. Привалова // Совр. пробл. математики и матем. образования: XV Владикавказская молодеж. матем. школа – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020. – С. 233-235.

7. Шамоян Ф.А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сиб. матем. журн. — 1999. — 40:6. — С.1422–1440.

8. Шамоян Ф.А. О некоторых свойствах нулевых множеств класса И.И. Привалова в круге // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 199–205.

9. Шамоян Ф. А., Родикова Е. Г. О характеристике корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавказский матем. журн. — Владикавказ: Инст. прикл. матем. и инф. ВНЦ РАН. — 2014.