КОМБИНАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИЛИ–ДЕВИТТА И ИХ СВОЙСТВА

@ А.В. Иванов, Н.В. Харук
regul1@mail.ru, natakhharuk@mail.ru

УДК 517.958

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.14.

Асимптотическое разложение теплового ядра при малых значениях собственного времени может быть записано в виде ряда с коэффициентами Сили–деВитта [1-3]. Используя эти коэффициенты, в работе [4] мы строим функции специального типа и изучаем их свойства. Рассматриваются некоторые приложения этих функций. В частности, мы показываем их связь с фундаментальным решением оператора Лапласа в d -мерном пространстве при $x \sim y$.
Ключевые слова: тепловое ядро, оператор Лапласа, коэффициент Сили–деВитта.

Combinations of Seeley-DeWitt coefficients and their properties

The asymptotic expansion of the heat kernel at small values of proper time can be written as a series with Seeley–DeWitt coefficients [1-3]. Using these coefficients, in the paper [4] we construct functions of a special type and study their properties. Some applications of these functions are considered. In particular, we show their relation to the fundamental solution of the Laplace operator in d -dimensional space at $x \sim y$.

Keywords: heat kernel, Laplace operator, Seeley–DeWitt coefficient.

Мы рассматриваем оператор A на гладком компактном римановом многообразии M без границы. Локально в некоторой окрестности $U \subset M$ такой оператор можно представить в виде

$$A(x) = -g^{-1/2}(x)D_{x^\mu}g^{1/2}(x)g^{\mu\nu}(x)D_{x^\nu} - v(x), \quad (1)$$

где $x \in U$, D_{x^μ} – ковариантная производная, $v(x)$ – гладкий потенциал, $g^{\mu\nu}(x)$ и $g(x)$ – метрический тензор и его определитель. Спектр такого

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г. Также, Иванов А.В. является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Иванов Александр Валентинович, и.о. м.н.с., ПОМИ РАН, (Санкт-Петербург, Россия); Aleksandr Ivanov (PDMI RAS, St. Petersburg, Russia)

Харук Наталья Вячеславовна, аспирант, лаборант, ПОМИ РАН, (Санкт-Петербург, Россия); Natalia Kharuk (PDMI RAS, St. Petersburg, Russia)

оператора является вещественным, счетным, и единственной точкой накопления может быть $+\infty$. Для определенности мы будем предполагать, что все собственные значения строго больше нуля.

Для такого оператора можно поставить задачу для поиска теплового ядра. Для фиксированного $m^2 > 0$ она имеет вид

$$\begin{cases} (\partial_\tau + A(x) + m^2)K(x, y; \tau) = 0; \\ K(x, y; 0) = g^{-1/2}(x)\delta(x - y), \quad x, y \in U, \quad \tau > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Замкнутую формулу для решения такой задачи можно найти лишь в редких случаях. Однако, многие вопросы квантовой теории поля позволяют обойтись наличием асимптотического решения при $\tau \rightarrow +0$. Анзатц для такого решения имеет вид

$$K(x, y, \tau) = (4\pi\tau)^{-d/2} \Delta^{1/2}(x, y) e^{-\sigma(x, y)/2\tau - \tau m^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \tau^k a_k(x, y), \quad (3)$$

где $a_k(x, y)$ – коэффициенты Сили-деВитта, $\sigma(x, y)$ – функции Синджа и $\Delta(x, y)$ – детерминант Ван-Влек–Моретта.

Рассмотрим следующий ряд

$$\Delta^{1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma^{k+\alpha} (b_k + \ln(\sigma)c_k) a_k, \quad (4)$$

где наборы α , $\{b_k\}_{k \geq 0}$ и $\{c_k\}_{k \geq 0}$ являются комплексными числами. Оказывается, что путем выбора числовых коэффициентов можно получить семейства функций специального вида, на которых оператор Лапласа превращается в оператор сдвига. Более того, такие функции позволяют найти разложения для фундаментального решения, теплового ядра, а также для некоторых других важных физических объектов.

Литература

1. *Kirsten K.* Spectral Functions in Mathematics and Physics // Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001
2. *Gilkey P.B.* Asymptotic Formulae in Spectral Geometry // CRC Press, Boca Raton, 2004
3. *Berline N., Getzler E., Vergne M.* Heat Kernels and Dirac Operators // Berlin, Springer, 2004
4. *Ivanov A.V., Kharuk N.V.* Two Function Families and Their Application to Hankel Transform of Heat Kernel // arXiv:2106.00294 [math-ph], 2021