ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ТРЕМЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

@ А.Г. Олими (А.Г. Олимов), Н.К. Охунов

Abdumanon1950@mail.ru, okhunov_73@mail.ru

УДК 517.927.21

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.78.

В сообщении для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с тремя слабо сингулярными точками, найдено представление общего решения, которое применяется для исследования свойств решений, выяснения постановки и решения задач Коши - Рикье и типа линейного сопряжения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение специального типа, слабо сингулярная точка, общее решение, формулы обращения, свойства решений, задачи Коши - Рикье и линейного сопряжения.

Integral representation of the general solution and boundary value problems for an ordinary differential equation of a special type with three weakly singular points

In the message for the equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with three weakly singular points is found representation of the general solution, which is used to study the properties of solutions, formulation and solv of Cauchy - Riquier and linear conjugation problems.

Keywords: special type differential equation, weakly singular point, general solution, inversion formulas, properties of solutions, Cauchy - Riquier and linear conjugation problems.

Пусть $\Gamma = (a, b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ - точки отрезка $\bar{\Gamma}$, $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$, $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, 3}$ - действительные числа, n - натуральное число. На множестве $\Gamma_{(b)}$ рассмотрим уравнение

$$A_{(\alpha), (b)}^n y = f(x) \cdot \prod_{j=1}^3 |x - b_j|^{-\alpha_j} \quad (1)$$

Олими Абдуманон Гафорзода (Олимов Абдуманон Гафорович), к.ф.-м.н., доцент, ХГУ (Худжанд, Таджикистан); Olimi Abdumanon Gaforzoda (Olimov Abdumanon Gaforovich) (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Охунов Нозимджон Кобилович, ХГУ (Худжанд, Таджикистан); Okhunov Nozimjon Kobilovich (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ - известные, $y(x)$ - искомая функции, а

$$A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + p(x) \prod_{j=1}^3 |x - b_j|^{-\alpha_j} y - q(x) \prod_{j=1}^3 |x - b_j|^{-\alpha_j}$$

Решение уравнения (1) определяется также как в работах [1,2].

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\bar{\Gamma}$ за исключением, быть может, точек b_j , $j = \overline{1, 3}$. В этих точках они могут иметь разрыв первого рода. Пусть $\Gamma = \bigcup_{i=1}^2 \Gamma_i$, $\Gamma_i = (b_i, b_{i+1})$, x_i^0 - фиксированная точка промежутка Γ_i , далее $\Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0]$, $\Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$, $i = 1, 2$. Тогда общее решение уравнения (1), а также степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от нее выражается формулой

$$A_{(\alpha),(b)}^s y(x) = \begin{cases} I_{b_i, s}^{\alpha_i+} [p_i^1(x), q_i^1(x), f_i^1(x), C_{i, s}^1, \dots, C_{i(n-1)}^1] & \text{при } x \in \Gamma_i^1 \\ I_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}-} [p_i^2(x), q_i^2(x), f_i^2(x), C_{i, s}^2, \dots, C_{i(n-1)}^2] & \text{при } x \in \Gamma_i^2 \end{cases}, i = 1, 2,$$

(2)
 $s = \overline{0, (n-1)}$, где $p_i^k(x), q_i^k(x), f_i^k(x), k = 1, 2$ -известные функции а $I_{b_i, s}^{\alpha_i+} [\dots]$ и $I_{b_{i+1}, s}^{\alpha_{i+1}-} [\dots]$ известные интегральные операторы, соответственно определяемые по формулам (1.9) и (2.3) из работы [2, с.6,7], а $C_{i, j}^k$, $i, k = 1, 2, j = \overline{0, (n-1)}$ - произвольные постоянные.

Представление (2) обладает следующими свойствами: а) группы произвольных постоянных $C_{i, j}^1$ и $C_{i, j}^2$, соответствующие значениям $i = 1$ и $i = 2$, $j = \overline{0, (n-1)}$ однозначно выражаются одна через другой, так что, формула зависит только от n произвольных постоянных; б) представление обратимо, если известно решение уравнения (1), выражаемое формулой (2), то соответствующие ему постоянные находятся однозначно.

Выше сказанное позволяет решить следующие задачи Коши – Рикье и типа линейного сопряжения, единственное решение которых дается при помощи формулы (2): требуется найти решение уравнения (1), подчиняющееся одному из следующих групп условий:

- 1) $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = y_{1j}^1$, $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = y_{2j}^1$;
- 2) $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} = y_{2j}^1$, $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} = y_{2j}^2$;
- 3) $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} = y_{2j}^2$, $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = y_{2j}^2$;
- 4) $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} = y_{1j}^1$, $[A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = y_{2j}^2$, $j = \overline{0, (n-1)}$;

$$\begin{aligned}
& 5) \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_1+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{i(n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{i(2n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_2+0} + \sum_{j=0}^{n-1} b_{i(3n+j)} [A_{(\alpha),(b)}^j y(x)]_{x=b_3-0} = d_i, \quad i = \overline{1, 2n},
\end{aligned}$$

где $y_{ij}^k, i, k = 1, 2, b_{ij}$ и $d_i, i = \overline{1, 2n}$, $j = \overline{0, (n-1)}$ - известные числа.

Литература

1. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super - singular coefficients. Dushanbe, (1998), 160p.

2. *Дадоджонов М.Я., Олимов А.Г.* Интегральное представление решений и задача Коши-Рикье для двух обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с граничной слабо сингулярной точкой // Ученые записки. Серия естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет им. Б.Г.Гафурова, 2015, №2(33), 3-10.