ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРУ-УЛАМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов

ilolov.mamadsho@gmail.com, jamesd007@rambler.ru

УДК 515.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.72.

В банаховом пространстве X рассматривается уравнение $\dot{x} = A(t)x(t)$ в котором оператор $A(t)$ является ω -периодический оператор-функцией. Установлено, что данное уравнение устойчиво в смысле Хайера-Улам тогда и только тогда, когда его оператор монодромии является устойчивым.

Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, устойчивость по Хайеру Улам, оператор монодромии.

On the equivalence of exponential dichotomy and Hayes-Ulam stability of linear periodic differential equations in banach space

In a Banach space X , we consider the equation $\dot{x} = A(t)x(t)$ in which the operator $A(t)$ is ω -periodic operator function. It is established that this equation is stable in the Hayer-Ulam sense if and only if its monodromy operator is stable.

Keywords: exponential stability, Hayer Ulam stability, monodromy operator.

Концепция экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии) дифференциальных уравнений восходит к работе О.Перрона [1]. Усилиями математиков разных стран данная концепция получила свое развитие и нашла применение при анализе свойств многих классов функциональных, в частности, дифференциальных уравнений. В конечномерном случае в работе [2] доказано, что э-дихотомия и устойчивость по Хайеру-Улам являются эквивалентными для линейных систем с периодическими коэффициентами. В настоящей работе похожий результат получен для линейных периодических уравнений в банаховом пространстве.

Илолов Мамадшо, д.ф.-м.н., профессор, ЦИРННТ НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Mamadsho Ilolov (Center of Innovative Development of Science and New Technologies of National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Рахматов Джамшед Шавкатович, ЦИРННТ НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Jamshed Sh. Rahmatov (Center of Innovative Development of Science and New Technologies of National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

В монографии [3] рассматривается уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

в банаховом пространстве X , где оператор $A(t)$ является ω -периодической оператор-функцией, т.е. для некоторого $\omega > 0$

$$A(t + \omega) = A(t), 0 \leq t \leq \infty. \quad (2)$$

Оператор Коши $U(t)$ уравнения (1) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \\ U(\cdot) = I \end{cases} \quad (3)$$

где I -тождественный оператор.

Очевидно, что с учетом (2) системе (3) удовлетворяет также и оператор

$$U_1(t) = U(t + \omega)U^{-1}(\omega).$$

В силу единственности решения системы (3) получим $U_1(t) = U(t)$, откуда $U(t + \omega) = U(t)U(\omega)$. Оператор $U(\omega)$ называется оператором монодромии уравнения (1).

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (1) было э-дихотомическим на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(U(\omega))$ не имеет пересечения с единичной окружностью $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Далее, установим условия устойчивости в смысле Хайера-Улам для уравнения (1), или что то же самое для семейства операторов $\mathfrak{A} = \{A(t)\}_{t \geq 0}$.

Пусть $R_+ = [0, \infty]$ -множество всех неотрицательных чисел и пусть $f(\cdot) - X$ -значная функция определенная на R_+ .

Рассмотрим уравнения в банаховом пространстве X

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \in R \quad (4)$$

и

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in R_+.$$

Пусть ε -положительное число. Непрерывная X -значная функция $y(t)$ определенная на R_+ называется ε -приближенным решением (4) если она непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+ \setminus (\omega\mathbb{Z}_+)$ и $\|\dot{y}(t) - A(t)y(t)\| \leq \varepsilon$.

Семейство операторов $\mathfrak{A}$ называется устойчивой в смысле Хайера-Улам, если существует неотрицательная постоянная L такая, что для

каждого ε -приближенного решения φ уравнения (4) существует точное решение Θ (5) такое, что

$$\sup_t \|\varphi(t) - \Theta(t)\| \leq \varepsilon.$$

Справедливо основное утверждение.

Теорема 2. Семейство $\mathfrak{A} = \{A(t)\}_{t \geq 0}$ устойчиво по Хайеру-Улам тогда и только тогда, когда его оператор монодрамии $U(\omega)$ является э-дихотомическим.

Литература

1. *Perron O.* Uber line Matrixtransformation (in German) // Math.Zeitchrift, **32**:1 (1930), 465-473.
2. *Barbu D., Buse C., Tabassum A.* Hyers-Ulam stability and exponential dichotomy of linear differential periodic systems are equivalent // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **58** (2015), 1-12.
3. *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1970.