О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С КОСЕКАНСКИМ И ЛОГАРИФИЧЕСКИМ ЯДРОМ

@ Ю.С. Солиев

su1951@mail.ru

УДК 517.518.87

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.82.

Для интегралов с косекансным и логарифмическим ядром исследованы интерполяционные квадратурные формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: интеграл, косекансное ядро, логарифмическое ядро, интерполяция, квадратурная формула, кратные узлы.

On quadrature formulas with multiple nodes for integrals with a cosecant and logarithmic kernel

For integrals with cosecant and logarithmic kernels, interpolation quadrature formulas with multiple nodes are studied.

Keywords: integral, cosecant kernel, logarithmic kernel, interpolation, quadrature formula, multiple nodes.

Рассмотрим интегралы

$$Af = A(f; x) = \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{cosec} \frac{t-x}{2} dt, \quad Lf = L(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \ln \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| dt,$$

где $f(x)$ - плотность интегралов, непрерывная 2π - периодическая функция.

Следуя [1], через $H_n f = H_n(f; x)$ обозначим тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos nx$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{2k\pi}{n} (k = \overline{1, n})$, такой, что $H_n(x_k) = f(x_k)$, $H'_n(x_k) = f'(x_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Аппроксимируя плотность интегралов полиномом $H_n f$ получим квадратурные формулы

$$Af = A(H_n f; x) + R_{n1} f = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n (A_k(x) f(x_k) + B_k(x) f'(x_k)) + R_{n1} f,$$

Солиев Юнус Солиевич, к.ф.-м.н., доцент, Московский автомобильно - дорожный государственный технический университет (Россия); Yunus Soliev (Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, Russia)

$$A_k(x) = n \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left(\cos j(x-x_k) \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| - C_j(x) \right),$$

$$B_k(x) = n \left(\ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| \sin(x-x_k) + 2 \sin \left(x_k - \frac{1}{2}x \right) \right) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left(2 \sin(x-x_k) \cos j(x-x_k) \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right| + S_{j+1}(x) - S_{j-1}(x) \right),$$

$$C_m(x) = 2 \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2\mu-1} \cos \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \right) x - m(x-x_k) \right),$$

$$S_m(x) = 2 \sum_{\mu=1}^m \frac{1}{2\mu-1} \sin \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \right) x - m(x-x_k) \right);$$

$$Lf = L(H_n f; x) + R_{n2}f = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (a_k(x)f(x_k) + b_k(x)f'(x_k)) + R_{n2}f,$$

$$a_k(x) = -2n \ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \frac{\cos j(x-x_k)}{j},$$

$$b_k(x) = -\sin(x-x_k)(n + (n-1) \cos(x-x_k)) + \\ + \sum_{j=2}^{n-1} (n-j) \left(\frac{\sin(j-1)(x-x_k)}{j-1} - \frac{\sin(j+1)(x-x_k)}{j+1} \right),$$

где $R_{nm}f = R_{nm}(f; x)$ ($m = 1, 2$) остаточные члены.

Пусть $H_\alpha^{(r)}$ ($r = 0, 1, 2, \dots, 0 < \alpha \leq 1$) - класс 2π - периодических функций $f(x)$, r - производные которых удовлетворяют условию Гельдера H_α

Теорема. Если $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ ($r \geq 1, 0 < \alpha \leq 1$), то $\|R_{nm}f\|_C = O\left(\frac{\ln^{2-m} n}{n^{r+\alpha-1}}\right)$, $m = 1, 2$.

Литература

1. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Высшая школа, 1968, 320 с.