КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

@ А.М. Абылаева, М. Алдай

abylayeva_b@mail.ru, saiajan@yandex.kz

УДК 517.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.36.

Краткая аннотация. В работе рассматриваются вопросы ограниченности и компактности для одного класса интегральных операторов с логарифмической особенностью. В последние годы такие вопросы интенсивно исследуются в пространствах Лебега, Соболева и Морри. В работе получены критерии ограниченности и компактности интегральных операторов с логарифмической особенностью и соответствующие весовые оценки.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега, интегральный оператор, весовая функция, ограниченность, компактность.

Boundedness criterion for an integral operator with a logarithmic singularity

The paper deals with the issues of boundedness and compactness for one class of integral operators with a logarithmic singularity. In recent years, such questions have been intensively investigated in Lebesgue, Sobolev, and Morrey spaces. In this paper, criteria for the boundedness and compactness of integral operators with a logarithmic singularity and the corresponding weighted estimates are obtained.

Keywords: weighted Lebesgue spaces, integral operator, weight function, boundedness, compactness.

Введение. Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $v(t)$, $w(t) \in L_{(0,\infty)}^{loc}$ – весовые функции, где $v(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$, $\forall t \in I$, $I = (0, \infty)$.

В данной работе изучается ограниченность и компактность оператора

$$K_{\gamma} f(x) = \int_0^x W^{\gamma-1}(s) \ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} f(s) w(s) ds, \quad \forall x \in I, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке по бюджетной программе, подпрограмма проект по 102 ГФ, ИРН AP08856339 (проект № 321 от 19.11.2020).

Абылаева Акбота Мухамедияровна, к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Akbota Abylayeva (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Алдай Мактагул, к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Maktagul Alday (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

из пространства $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в пространство $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$.

Здесь обозначим через $L_{p,w}(I)$ пространство, состоящее из множества всех измеримых функций f с нормой $\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^x |f(s)|^p w(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Кроме того, пусть $W(x) = \int_0^x w(s) ds$, $x > 0$. $W(x)$ – неотрицательная, строго возрастающая и локально абсолютно непрерывная функция.

Для оператора вида (1), когда $W(x) = x$, т.е. для частного случая рассматриваемого нами оператора, в работе [1] были получены ограниченность и компактность из весового пространства Лебега L_p в весовое пространство Лебега L_q , когда параметры удовлетворяют условиям $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$ и $0 < q < p < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$, $p > 1$.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Тогда для ограниченности оператора K_γ из весового пространства Лебега $L_{p,w}$ в весовое пространство $L_{q,v}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_\gamma = \sup_{x>0} A(x) < \infty, \quad ; \quad A(x) = \left(\int_x^\infty \frac{v(t)}{W^q(t)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x W^{\gamma p'}(t) w(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Кроме того, $\|K_\gamma\| \approx A_\gamma$.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Тогда для компактности оператора K_γ из весового пространства Лебега $L_{p,w}$ в весовое пространство $L_{q,v}$ необходимо и достаточно выполнения условий:

$$1. A = \sup_{s>0} A(s) < \infty$$

и

$$2. \lim_{s \rightarrow 0} A(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = 0.$$

Литература

1. Abylayeva A. and Person L.-E. Hardy type inequalities and compactness of a class of integral operators with logarithmic singularities. // Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, № 1, 2018, P.201-215.