РАСЩЕПЛЕНИЕ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В ИСКРИВЛЕННОМ СЛОЕ

@ Е.В. Выборный

evybornyi@hse.ru

УДК 517.962.22

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.9.

Рассмотрено стационарное уравнение Шредингера для заряда в сильном магнитном поле в окрестности двумерного слоя с квадратичным удерживающим потенциалом в случае резонанса циклотронной частоты и частоты поперечных колебаний. Известно, что малое искривление плоского слоя приводит к медленному дрейфу центра циклотронного движения частицы в поверхности слоя. Применяя квантовые методы усреднения, в работе построен оператор на поверхности слоя, который описывает соответствующую медленную динамику. Спектр данного оператора определяет квантование линий тока на поверхности слоя и малое расщепление уровней Ландау. В работе построена асимптотика спектральной серии для основного уровня Ландау в окрестности невырожденных стационарных точек искривленной поверхности.

Ключевые слова: оператор Шредингера, усреднение, уровни Ландау.

Asymptotics of solutions of difference equations in an unbounded domain

The stationary Schrödinger equation is considered for a charge in a strong magnetic field in a neighborhood of a curved two-dimensional surface with the quadratic confinement potential. We consider the case of resonance, where the cyclotron frequency equals to the frequency of transverse oscillation. It is known that a small curvature of the layer leads to a slow drift of the center of the particle cyclotron motion on the layer surface. Using quantum averaging methods, we obtain the operator on the layer surface that describes the corresponding slow dynamic. The spectrum of this operator determines the quantization of current lines on the surface and a small splitting of the Landau levels. In this paper, we obtain the asymptotics of the spectral series for the ground Landau level in the neighborhood of nondegenerate stationary points of the curved surface.

Keywords: Schrödinger operator, averaging, Landau levels.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Выборный Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Evgeny Vybornyi (HSE, Moscow, Russia)

В работе рассмотрена спектральная задача для магнитного оператора Шредингера, который в безразмерных координатах приобретает вид:

$$H = \frac{1}{2} \left(-ih \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{q_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-ih \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{q_1}{2} \right)^2 - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\omega^2}{2} d(q)^2.$$

Здесь однородное магнитное поле направлено вдоль координаты q_3 , а $d(q)$ — расстояние до поверхности искривленного слоя. Предполагаем, что поверхность искривленного слоя задана явно в виде графика функции $q_3 = \varepsilon f(q_1, q_2)$, где ε — малый параметр. Мы рассматриваем резонансный случай, когда $\omega = 1$, то есть частота колебаний в удерживающем потенциале у поверхности слоя совпадает с циклотронной частотой в магнитном поле.

Заметим, что данная задача имеет два естественных малых параметра: h — безразмерный параметр квазиклассического приближения и ε — параметр, который определяет малое возмущение плоского слоя поверхности. Данная система допускает асимптотическое разделение переменных на быстрые осцилляции и медленную динамику центров Ларморовских вихрей на двумерной поверхности слоя. Системы с аналогичными свойствами были рассмотрены ранее, например, в работах [1,2,3]. Особенность рассматриваемой системы обусловлена наличием резонанса частот, что существенно меняет подход квантового осреднения.

Отметим, что спектр оператора H при $\varepsilon = 0$ представляет собой дискретный набор бесконечно вырожденных уровней Ландау hn , $n = 1, 2, \dots$, а малое искривление поверхности слоя приводит к расщеплению вырожденных уровней в старших поправках по ε .

Переходя к криволинейным координатам в окрестности поверхности и применяя алгебраические методы квантового усреднения, в настоящей работе получен двумерный оператор, который определяет расщепление уровней и медленную динамику на поверхности (геометрический ток).

Предложение. Пусть гладкая функция поверхности слоя в окрестности положения равновесия имеет разложение вида:

$$f(q_1, q_2) = \frac{w_1}{2} q_1^2 + \frac{w_2}{2} q_2^2 + \dots, \quad w_j \neq 0.$$

Тогда на подпространстве нижнего уровня Ландау исходный оператор H унитарно эквивалентен усредненному оператору вида:

$$\underline{H} = h - \frac{\varepsilon^2 h}{2} (w_1^2 X_1^2 + w_2^2 X_2^2 + 2\mu h) + O(\varepsilon^2 h^2 (\varepsilon + h)),$$

где $X_{1,2}$ — некоммутативные координаты ведущего центра на поверхности с коммутационными соотношениями $[X_1, X_2] = ih$, а константа $\mu = \frac{8}{3} w_1^2 + \frac{8}{3} w_2^2 - \frac{5}{6} w_1 w_2$.

Соответствующая асимптотическая спектральная серия имеет вид:

$$E_m = h \left(1 - \varepsilon^2 w_1 w_2 h(m + 1/2) + \mu h \varepsilon^2 + \dots \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Литература

1. *M. V. Karasev* Magneto-Dimensional Resonance. Pseudospin Phase and Hidden Quantum Number // *Russ. J. Math. Phys.*, **24**(3), 326–335 (2017)
2. *J. Brüning, S. Y. Dobrokhotoy, and K. Pankrashkin* The spectral asymptotics of the two-dimensional Schrödinger operator with a strong magnetic field. I. // *Russ. J. Math. Phys.*, **9** (1), 14–49 (2002).
3. *A. Y. Anikin, J. Brüning, S. Y. Dobrokhotoy, E. V. Vybornyi* Averaging and Spectral Bands for The 2-D Magnetic Schrödinger Operator with Growing and One-Direction Periodic Potential // *Russ. J. Math. Phys.*, **26** (3), 265–276 (2019).