О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

@ А.Б. Шишкин
shishkin-home@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.66.

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению типа свертки, называются его элементарными решениями. Необходимо описать множество всех элементарных решений такого уравнения в терминах его характеристической функции.

Ключевые слова: однородные уравнения типа свертки, спектральный синтез, спектральный анализ.

Spectral analysis in spaces of solutions of homogeneous equations of convolution type

Exponential polynomials that satisfy a homogeneous convolution-type equation are called its elementary solutions. It is necessary to describe the set of all elementary solutions of such an equation in terms of its characteristic function.

Keywords: homogeneous convolution type equations, spectral synthesis, spectral analysis.

Выберем произвольный многочлен $\pi(z)$ степени q . Целая функция f называется π -симметричной, если она представляется в виде композиции $f = g \circ \pi$, где g — целая функция. Символом $O_\pi(\mathbf{C})$ обозначим семейство всех целых π -симметричных функций. Для любой целой функции f имеет место единственное π -симметричное представление

$$f(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p f_p(z), \quad f_p \in O_\pi(\mathbf{C}), \quad (1)$$

см. [1].

Пусть $\{a_0(z), \dots, a_{q-1}(z)\}$ — произвольный набор многочленов, не все из которых равны тождественному нулю. Считаем, что степень полинома $a_p(z)$ не превосходит p . Рассмотрим непрерывный эндоморфизм A пространства целых функций $O(\mathbf{C})$, действующий по правилу

$$A : f(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) f_p(z),$$

Шишкин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, КубГУ (Краснодар, Россия);
Andrey Shishkin (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

где $f_p(z)$ — π -симметричный коэффициент представления (1).

Пусть Ω_0, Ω — выпуклые области в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, U_ε — круг $\{h : |h| < \varepsilon\}$. Будем считать, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$. Для произвольного $h \in U_\varepsilon$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!} (D^n f)(\zeta)$$

действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и называется оператором π -сдвига (на шаг h), см. [2].

Выберем произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S_0 на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция $\psi(h) := \langle S_0, AT_h(f) \rangle$ называется π -сверткой функции f и функционала S_0 . Уравнение

$$\langle S_0, AT_h(f) \rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \quad (2)$$

называется *однородным уравнением π -свертки*. Целая функция $\varphi_0(\lambda) := \langle S_0, e^{\lambda z} \rangle$ называется характеристической функцией уравнения (2).

Задача спектрального анализа состоит в следующем: описать элементарные решения (экспоненциальные полиномы) однородного уравнения π -свертки в терминах его характеристической функции.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$ и $\omega_\lambda := \pi(\lambda)$. Если функция $f(\zeta) \in O(\pi^{-1}(\omega_\lambda))$ является локально аналитической на π -слое $\pi^{-1}(\omega_\lambda)$, то функция

$$(\text{sym } f)(\omega) := \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \pi^{-1}(\omega)} f(\zeta), \quad \omega := \pi(\zeta)$$

является аналитической в точке ω_λ . При этом функция $(\text{sym } f)(\pi(\zeta))$ представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где $g := \text{sym } f \in O(\omega_\lambda)$ и называется π -симметризацией функции $f(\zeta)$.

Теорема. *Элементарные решения однородного уравнения π -свертки исчерпываются линейными комбинациями экспоненциальных полиномов вида*

$$e(z) := \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} \left(\text{sym} \frac{c(\pi(\zeta))}{\varphi_0(\zeta)} e^{\zeta z} \right) \Big|_{\omega=\omega_\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

где

$$c(\omega) \in O(\omega_\lambda), \quad \frac{c(\pi(\zeta))}{\varphi_0(\zeta)} \in O(\pi^{-1}(\omega_\lambda)).$$

Литература

1. Красичков-Терновский И.Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб., **182**:11 (1991), 1559-1588.

2. *Шиликин А.Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ, **447** (2016), 129–170.