О ИЗОСПЕКТРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ДИРАКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

@ О.Э.Мирзаев
olim-mirzaev@mail.ru

УДК 517.97

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.21.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения семейства краевых задач для система уравнений Дирака на конечном отрезке.

Ключевые слова: собственные значения, нормирующие константы, обратные задачи, интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

On the isospectral Dirac operator on the finite segment

In this paper, we propose an algorithm for constructing a family of boundary value problems for the system of Dirac equations on the finite segment.

Keywords: eigenvalues, normalization constants, inverse problems, Fredholm integral equations of the second kind.

1. Введение

Определение 1.1. *Краевые задачи для системы уравнений Дирака*

$$L^0 y \equiv B y' = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (2)$$

и

$$L(p(x), q(x)) y \equiv B y' + Q(x) y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (4)$$

называются *изоспектральными*, если у них имеются одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L(p(x), q(x))) = \sigma(L^0) = \{n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а $p(x), q(x) \in C[0, \pi]$ - действительная непрерывная функция на отрезке $[0, \pi]$.

Мирзаев Олим Эркинович, докторант, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Mirzaev Olim (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач системы дифференциальных уравнений Дирака на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах [1]-[5]. М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев (см.[6]) показали, что оператор Дирака на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, а также ими найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач. М.Г.Гасымовом и Б.М.Левитаном (см.[7]) были найдены необходимые и достаточные условия восстановления оператора Дирака на полуоси по их спектральным функциям. При построении изоспектральных оператора Дирака на конечном отрезке с заданным спектром $\sigma(L(p(x), q(x))) = \{\lambda_n, n \in Z\}$ нами использован метод работы Гасымова-Левитана (см.[7]). Этот метод основан на восстановлении коэффициента оператора Дирака по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Следует отметить, что изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [8]-[16]. Теория обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля и их приложения более подробно изложена в работах [17]-[24].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм, восстановления семейства операторов Дирака $L = L(p(x), q(x))$ на конечном отрезке, спектры которых удовлетворяют условия: $\sigma(L) = \{\lambda_n = n, n \in Z\}$.

2. Некоторые сведения об обратной задаче для оператора Дирака на конечном отрезке

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1.$$

Хорошо известно [19], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (3), (5) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой вектор-функцией по λ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \quad (6)$$

при этом матрица-функция $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ является решением задачи

$$BK'_x(x, t) + K'_t(x, t)B = -Q(x)K(x, t), \quad (7)$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -Q(x) \quad (8)$$

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ при любом λ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(0, \lambda) = 0$. Поэтому собственные значения λ_n , $n \in Z$ задачи(3),(4) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi, \lambda) = 0. \quad (10)$$

Тогда $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$, $n \in Z$ является собственной вектор-функцией задачи(3),(4).

Положим

$$a_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx, \quad n \in Z. \quad (11)$$

Числа a_n , $n \in Z$ называются нормировочными числами краевой задачи(3),(4). Набор чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи(3),(4).

Теорема 2.1 ([6]). *Если $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k -порядка из $L^2[0, \pi]$, то для спектральных данных $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^\infty$ задачи (3) – (4) справедливы равенства*

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k,n}}{n^k}, \quad (12)$$

$$a_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}. \quad (13)$$

где ряды

$$\sum_{n=-\infty}^\infty |\alpha_{k,n}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^\infty |c_{k,n}|^2 < \infty$$

сходятся.

Следует отметить, что собственные вектор-функции $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$, $n \in Z$ задачи(3),(4), соответствующие различным собственным значениям ортогональны в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых двух компонентных вектор-функций $L_2^2(0, \pi)$ и для произвольных вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[0, \pi]$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^\infty \varphi(x, \lambda_n) \left\{ \frac{1}{a_n} \int_0^\pi \varphi^T(t, \lambda_n) f(t) dt \right\}.$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi^T(t, \lambda_n) = I \delta(x - t), \quad (14)$$

где I -единичная матрица, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) = I\delta(x-t). \quad (15)$$

Теорема 2.2 ([6]). Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ краевой задачи (3), (4) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Лемма 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n) (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) = 0, \quad 0 < t < x < \pi. \quad (16)$$

Теорема 2.3 ([6]). Ядро $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ оператора преобразования (6), удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad (0 < t \leq x < \pi), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \begin{pmatrix} \sin \lambda_n x \\ -\cos \lambda_n x \end{pmatrix} (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) \right\} - \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема 2.4 ([6]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ были спектральными данными некоторой краевой задачи вида (3) – (4) с матричной функцией вида

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

где $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные k -го порядка из $L^2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы для λ_n , $n \in Z$ и a_n , $n \in Z$ выполнялись асимптотические формулы (12) и (13).

Итак, пусть $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ удовлетворяют условиям (12) и (13). Построим матрица-функции $F(x, t)$ по формуле (18) и рассмотрим интегральные уравнения (17) относительно $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5 ([6]). При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ интегральное уравнение (17) имеет единственное решение $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$.

Теперь, решая интегральное уравнение (17), находим матрица-функцию $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$. Далее определим вектор-функцию $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ по формуле (6). Тогда нетрудно показать, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ удовлетворяет уравнению

$$B\varphi' + Q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad Q(x) = K(x, x)B - BK(x, x)$$

и начальным условиям $\varphi_1(0, \lambda) = 0, \varphi_2(0, \lambda) = -1$.

3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ является спектральным данным краевой задачи (3), (4). Тогда последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ удовлетворяющий условиям

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} < \infty, \quad \gamma_n > 0, \quad n \in Z, \quad (19)$$

тоже является спектральным данным. Кроме того существует единственная краевая задача $L(p(x), q(x)) \equiv L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$ вида (3), (4) с коэффициентами

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots), \\ q(x) &= q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

собственные значения которых равны $n, n \in Z$, т.е.

$$\sigma(L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)) = \{n, n \in Z\}. \quad (21)$$

Доказательство. Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ определенная формулами (19) удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача вида (3), (4) с коэффициентами (20), и спектром (21).

Теперь находим коэффициенты (20). Для этого определим матрица-функцию $F(x, t)$ по формулам (18) и (19)

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x, t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \varphi(x, n) (\sin nt, -\cos nt), \quad (23)$$

где

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, s) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \quad (24)$$

Известно ([6], [19]), что вектор-функция $\varphi(x, \lambda)$ определенная по формуле(6) удовлетворяет дифференциальному уравнению вида(3) с коэффициентами (20), и начальным условиям $\varphi_1(0, \lambda) = 0$, $\varphi_2(0, \lambda) = -1$, где коэффициенты определяются по формулами

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} [\varphi_2(x, n) \sin nt - \varphi_1(x, n) \cos nt], \\ q(x) &= q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots) = \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} [\varphi_1(x, n) \sin nt + \varphi_2(x, n) \cos nt]. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее подставляя выражение (23) в формулу (24), имеем

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_p}{p^2+1} \varphi(x, p) \int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \quad (26)$$

Отсюда, получим собственную вектор-функции

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \frac{\sin nx}{1 + \frac{x\gamma_n}{n^2+1}} \\ -\frac{\cos nx}{1 + \frac{x\gamma_n}{n^2+1}} \end{pmatrix}, n \in Z,$$

соответствующую собственным значениям $\lambda_n = n$, $n \in Z$, т.к.

$$\int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds = \begin{cases} x, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

Легко проверяются выполнения граничных условий(4), т.е. $\varphi_1(0, \lambda_n) = 0$, $\varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0$, $\lambda_n = n$, $n \in Z$.

Таким образом, в статье построено семейство операторов Дирака $L(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$ на конечном отрезке, собственные значения которых совпадают с заданными числами $\lambda_n = n$, $n \in Z$.

Литература

1. *Т.Н. Арутюнян*. Изоспектральные операторы Дирака// Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, 29, №2, 1994, с.4-14.
2. *Albeverio S, Hryniv, Mykytyuk Ya*. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials//Russian Journal of Math Physics, 12(2005), 406-423.
3. *Etibar S. Panakhov, Tuba Gulsen*. Isospectrality problem for Dirac system// National academy of sciences of Azerbaijan, v.40, Special issue, 2014, p.386-392.

4. *YU.A.Ashrafyan, T.N.Harutyunyan*. Dirac operator with linear potential and its perturbations// Mathematical Inverse Problems, Vol.3, No.1 (2016), 12-25.
5. *Y.Ashrafyan, T.Harutyunyan*. Isospectral Dirac operators// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2017, №4, 1-9.
6. *Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т.* Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.
7. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР, -1966. –т.167, №5. –с.967-970.
8. *Poschel J., Trubowitz E.* Inverse spectral theory. // Academic Press, New York, 1987.
9. *Jodeit M., Levitan B.M.* The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.
10. *M.Jodeit, B.M.Levitan*. The izospectrality problem fo some vector boundary problems// Russian journal of mathematical physics, vol.6, No.4, 1999, pp.375-393.
11. *Ashrafyan Y.A., Harutyunyan T.N.* Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions. // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, №27, p.1-8.
12. *Мирзаев О.Э., Хасанов А.Б.* О семействах изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля. Уфимский математический журнал. Том 12. №2(2020). с. 28-34.
13. *О.Э. Мирзаев, А.Б. Хасанов.* Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. ДАН РУз. 2020, № 3, 3-9.
14. *Мирзаев О.Э., Муродов Ф.М.* Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 3(121), 50-55.
15. *Мирзаев О.Э.* Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 5(123), 60-64.
16. *Амбарцумян В.А.* Über eine Frage Eigenwerttheorie. Zeitschr, für Physik, 53,1929, pp.690-695.
17. *Алимов Ш.А.* О работах А.Н.Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. УМН, 6(192), 1976, 84-88.
18. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции //Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, №4, с. 309-360.
19. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
20. *В.А.Марченко.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев "Наукова Думка"1977.

21. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля // Тр. МИАИ, 2002, Т. 260., с. 227-247.
22. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007, 284 с.
23. *A.B.Hasanov.* Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. I. "Fan". Toshkent, 2011.
24. *A.B.Hasanov.* Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. "Turon-iqbol". Toshkent , 2019.