О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

@ М.Р. Рахимова

rakhimova.mahsuda@mail.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.79.

В докладе приведены результаты исследования по нахождению многообразия решений многомерных линейных комплексных систем уравнений с частными производными от двух комплексных независимых переменных. В зависимости от собственных значений матрицы коэффициентов получены явные формулы для решения.

Ключевые слова: многообразия решений, линейная комплексная система, аналитические функции.

On solutions of one multidimensional complex system with partial derivatives

Abstract. The report presents the results of a study on finding a variety of solutions of multidimensional linear complex systems of partial differential equations of two complex independent variables. Depending on the eigenvalues coefficient matrices explicit formulas for the solution are obtained.

Keywords: varieties of solutions, linear complex system, analytical functions.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных с двумя комплексными переменными вида

$$w_{z_2} = Aw_{z_1}, \quad (1)$$

где A —постоянная комплексная квадратная матрица порядка n . К таким системам приводятся условия полной разрешимости многомерных комплексных переопределенных систем уравнений в частных производных от двух комплексных переменных [1, 9]. Отметим, что система (1) в общем случае будет системой неклассического типа.

В системе (1) произведём замену $\omega = Sw$, где S — матрица, приводящая матрицу A к квазидиагональному жордановому виду

$$\Lambda = \text{diag}[\Lambda_1(\lambda_1), \dots, \Lambda_m(\lambda_m)], m \leq n,$$

Рахимова Махсуда Аюбовна, доцент, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан);
Rahimova Makhsuda Aubovna (Tajik State University of law, business and politics,
Khujand, Tajikistan)

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные значения матрицы A , $\Lambda_1(\lambda_1), \dots, \Lambda_m(\lambda_m)$ — жордановы клетки, соответствующие этим собственным значениям. Тогда из (1) следует, что

$$S^{-1}\omega_{z_2} = AS^{-1}\omega_{z_1}$$

или

$$\omega_{z_2} = \Lambda\omega_{z_1}. \quad (2)$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Все собственные значения матрицы A простые. В этом случае квазидиагональная жорданова форма матрицы A имеет вид $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Тогда полагая $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$, из системы (2) получим

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial z_2} = \lambda_k \frac{\partial \omega_k}{\partial z_2}, k = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что каждое из уравнений (3) имеет решения вида

$$\omega_k(z_1, z_2) = \varphi_k(z_1 + \lambda_k z_2) \quad (4)$$

и

$$\omega_k(z_1, z_2) = \overline{\phi_k(z_1, z_2)}, \quad (5)$$

где φ_k — аналитическая функция одной комплексной переменной, а ϕ_k — аналитическая функция двух комплексных переменных.

Случай 2. Пусть у матрицы A есть хотя бы одно непростое собственное значение. Допустим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — различные собственные значения матрицы A ($m < n$). В этом случае жордановы клетки $\Lambda_j(\lambda_j)$ порядка ν_j ($\nu_1 + \dots + \nu_m = n$) имеют вид

$$\Lambda_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

И вместо уравнений (3) получим следующую систему

$$\frac{\partial \vartheta_j^1}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j^1}{\partial z_1} + \frac{\partial \vartheta_j^2}{\partial z_1}, \quad (6)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \vartheta_j^{\nu_j-1}}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j^{\nu_j-1}}{\partial z_1} + \frac{\partial \vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial \vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_1}, j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Эту систему можно решить снизу вверх. Если взять $\vartheta_j^{\nu_j} = \varphi_j(z_1 + \lambda_j z_2)$, где φ_j — аналитическая функция одной переменной, и подставить в (7), то получим неоднородное уравнение, у которого имеется частное решение вида $z_2 \varphi'_j(z_1 + \lambda_j z_2)$. Поэтому можно взять $\vartheta_j^{\nu_j-1} = \phi_j(z_1 + \lambda_j z_2) + z_2 \varphi'_j(z_1 + \lambda_j z_2)$, где ϕ_j — аналитическая функция одной переменной.

Продолжая эту процедуру можно определить остальные ϑ_j^k , $k = \nu_j - 2, \dots, 1$. Если взять $\vartheta_j^{\nu_j} = \overline{\phi_{j,\nu_j}(z_1, z_2)}$, где ϕ_{j,ν_j} — аналитические по z_1, z_2 , то уравнение (7) будет иметь вид (8), поэтому можно взять $\vartheta_j^{\nu_j-1} = \overline{\phi_{j,\nu_j-1}(z_1, z_2)}$, ϕ_{j,ν_j-1} — аналитические по z_1, z_2 и т.д.

Этим способом мы получим некоторое многообразие решений уравнений (2) и (1).

Литература

1. Левитан Б.М. Об условиях совместности и общем решении одного класса многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными // Международная научно-теоретическая конференция "Современные проблемы математики и их приложения", посвященная 70-летию Таджикского национального университета и 80-летию академика Н. Раджабова, Душанбе, **123**:3 (2018), 9–14.