ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

@ Ф.М. Шамсудинов, С. Хомиддин

faizullo100@yahoo.com, smpk1992@mail.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.87.

В работе для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого уравнения связаны между собой определённым образом. Изучены свойства полученных решений.

Ключевые слова: переопределённая система, многообразия решений, прямоугольник, суперсингулярный коэффициент, свойства решений.

An overdetermined system of second-order equations with special coefficients

In this work, for one overdetermined system of second-order differential equations, an explicit representation of the solution manifold is obtained, when the coefficients of the first equation are related in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied.

Keywords: overdetermined system, manifold of solutions, rectangle, supersingular coefficient, properties of solutions.

Через D обозначим прямоугольник

$$D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0, \quad 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, \quad 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{x^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{x^\gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{y^\delta} u = \frac{f_3(x, y)}{y^\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, д.ф.-м.н., доцент, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Shamsudinov Fayzullo (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Сайфулло Хомиддин, преподаватель, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Saifulloi Homiddin (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x, y)$, $b_j(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_k(x, y)$, $j = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, 3}$ — заданные функции в области D , $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $\gamma = 1$, $\delta > 1$, $(\alpha, \beta - \text{натуральные числа})$.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]– [3].

Используя методику разработанного в [1] и [2] для системы уравнений (1) получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) $\alpha > 2$, $\beta > 2$, $\gamma = 1$, $\delta > 1$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\overline{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\overline{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\overline{D}),$$

$$b_2(x, y) \in C_x^1(\overline{D}), f_3(x, y) \in C_x^1(\overline{D});$$

$$2) c_2(x, y) = -c_1(x, y) + r^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \right) + a_1(x, y) b_1(x, y) = 0;$$

$$3) |a_2(x, y) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\lambda_1}, \quad H_1 = \text{const}, \quad 0 < \lambda_1 < 1,$$

$$|b_2(x, y) - b_2(0, 0)| \leq H_2 x^{\lambda_2}, \quad H_2 = \text{const}, \quad \lambda_2 > \delta - 1,$$

$$4) a_2(0, 0) > 0, b_2(0, 0) > 0,$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{y^\delta} \right) \text{ в } D;$$

$$b) x f_1(x, y) = x r^{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x} \right) + r^\beta a_1(x, y) f_1(x, y) \text{ в } D$$

$$\text{при } r^\beta a_2(x, y) = x^\gamma b_1(x, y);$$

$$c) a_2(x, y) f_3(x, y) + x y^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{y^\delta} \right) = b_2(x, y) f_2(x, y) + x y^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x} \right) \text{ в } D.$$

$$6) f_2(x, y) = o(x^{\mu_2}), \mu_2 > |a_2(0, 0)|.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x, y) \equiv \Theta_1(\psi_2(y), f_2 x, y), \quad (2)$$

где

$$\psi_2(y) \equiv N_1(c_1, y), \quad (3)$$

c_1 — произвольная постоянная.

Литература

1. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе : изд. ТГУ, 1992. - 236с.
2. *Раджабов Н., Махамед Эльсаед Абдель Аал.* Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями.- Lap Lambert Academic Publishing, Germany, 2011. - 234с.
3. *Тасмамбетов Ж. Н.* Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. - Актобе: 2015. - 463 с.