# ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ И КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**@ К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова**

*mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.22.*

В работе методами спектральной теории операторов Штурма-Лиуивлля найдены новые представления значений дзета-функции Римана в нечётных точках в виде кратных числовых рядов.

*Ключевые слова*: дзета-функция Римана, кратные числовые ряды.

## Values of the Riemann zeta function at odd points and multiple numerical series

In this work, new representations of the values of the Riemann zeta function at odd points in the form of multiple numerical series are found using the methods of the spectral theory of Sturm-Liuvell operators.

*Keywords*: Riemann zeta function, multiple number series.

Символом $\zeta(s)$ обозначим дзета-функцию Римана, а символом $\eta(s)$ - функцию

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Нами установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** *При* $m = 1, 2, \ldots$ *справедливы следующие равенства*

$$\mathcal{C}_m := \pi^{2m} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!} \frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} \right) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1}}{(2m)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin^2 x} dx$$

*и*

$$\mathcal{D}_m = \pi^{2m+1} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+2)!} \frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} - \frac{2^{2m+1}-1}{2^{2m}} \frac{\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}} \right) =$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия); Mirzoev Karakhan (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Safonova Tatyana (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

$$= \frac{(-1)^{m-1}2^{2m}}{(2m+1)!} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x} dx.$$

Учитывая в этих соотношениях известные равенства

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k+1)} \sin^{2k+1} x, \qquad x^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{C_{2k}^k k^2} \sin^{2k} x,$$

$$x^3 = 3! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k+1)} \left( \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n-1)^2} \right) \sin^{2k+1} x,$$

$$x^4 = 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right) \sin^{2k} x$$

(см., напр., [1, ch. 9, proposition 15]), можно доказать справедливость теоремы о представлении последовательностей $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{D}_m$ в виде кратных числовых рядов. В частности, справедливы равенства

$$\eta(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k-1)},$$

$$\eta(3) = \frac{1}{6} \left( \pi^2 \ln 2 - 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(2k-1)} \left( \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right) \right),$$

$$\eta(5) = \frac{1}{6} \left( \pi^2 \eta(3) - \frac{\pi^4}{20} \ln 2 + \frac{2}{5} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2(k+n-1)}^{k+n-1}}{C_{2n}^n n^2} \right),$$

$$\zeta(3) = \frac{4}{7} \left( \pi^2 \ln 2 - 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{k+n} \right),$$

$$\zeta(5) = \frac{6\pi^2}{31} \zeta(3) - \frac{2\pi^4}{93} \ln 2 +$$

$$+ \frac{4}{155} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{16^k}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{C_{2(k+n-1)}^{k+n-1} (2n+1)(2(n+k)-1)}.$$

**Литература**

1. *Berndt B.C.* Ramanujann's Notebooks: Part I. — New York, Springer Verlag, 1985.