КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

@ К.Г. Малютин, А.А. Наумова

malyutinkg@gmail.com, aliona.filatowa2013@yandex.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.53.

Найдены новые формулы для коэффициентов Фурье мероморфных в единичном круге функций, которые отличаются от формул, полученных ранее Рубелом и Тейлором. Коэффициенты Фурье выражаются через меру, определяемую нулями и полюсами функции.

Ключевые слова: коэффициент Фурье, мероморфная функция, единичный круг.

Fourier coefficients of meromorphic functions in the unit disc

New formulas for the Fourier coefficients of meromorphic functions in the unit disc are found. These formulas differ from the formulas obtained earlier by Rubel and Taylor. The Fourier coefficients are expressed in terms of the measure determined by the zeros and poles of the function.

Keywords: fourier coefficient, meromorphic function, unit disc.

Введем необходимые определения. Через $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ обозначим открытый единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — множество целых чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Через $C(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$ обозначим открытый круг с центром в точке a радиуса r . В частности, $C(r) = C(0, r)$. Пусть μ — положительная мера в круге $\mathbb{D}$; $\mu(r)$ — мера круга $C(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \text{supp } \mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Пусть

$$N_{\mu}(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt$$

— *проинтегрированная, или усредненная, функция меры* μ . Для заданной меры μ обозначим

$$d\mu_k(\zeta) = \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}, \quad \mu_k(r) = \mu_k((r)) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Наумова Алена Александровна, аспирант, КГУ (Курск, Россия); Alena Naumova (Kursk State University, Russia)

Пусть f — мероморфная функция в круге $\mathbb{D}$, $\mathcal{Z} = \{a_n\}$, $\mathcal{P} = \{b_n\}$ — последовательности нулей и полюсов функции f , через μ_f^+ обозначим меру $\mu_f^+(G) := \int_G d\delta_{\mathcal{Z}}(z)$, где $\delta_{\mathcal{Z}}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точках $\mathcal{Z}$. Аналогично, $\mu_f^-(G) := \int_G d\delta_{\mathcal{P}}(z)$. Положим $\mu^f = \mu_f^+ + \mu_f^-$,

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad T(r, f) = m(r, f) + N_{\mu_f^-}(r)$$

(здесь, как обычно, $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$ при $x \geq 0$, $\ln 0 := -\infty$),

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

— коэффициенты Фурье функции f .

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье мероморфной в круге $\mathbb{D}$ функции, которые несколько отличаются от соответствующих формул, полученных в работе [1].

Лемма. Пусть f — мероморфная функция в круге $C(0, 1)$, $f(0) = 1$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{P}$ — последовательности нулей и полюсов функции f ,

$$\ln f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

— разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Тогда для $0 < r < 1$ справедливо

$$c_0(r, f) = N(r, 1/f) - N(r, f);$$

$$c_k(r, f) = \frac{r^k}{2} \alpha_k + \frac{1}{2k} \iint_{|\zeta| \leq r} \frac{r^{2k} - \tau^{2k}}{r^k} d\mu_k^f(\zeta), \quad z = re^{i\theta}, \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

при $k \geq 1$ и $c_k = \bar{c}_{-k}$ при $k \leq -1$.

Литература

1. Rubel I.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53-96.