О РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

@ С. Байзаев, М. О. Садиков

sattor_bayzoev@rambler.ru, sodikov-8686@list.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.68.

В пространстве обобщённых функций медленного роста $S' = S'(C)$ рассмотрены комплексные системы уравнений, обобщающие уравнение бианалитических функций. Получена схема определения структуры носителя решения. На основе этого изложен способ нахождения решений.

Ключевые слова: пространство Шварца, носитель, теорема о структуре обобщённых функций с носителем на окружности.

On solutions of the generalized equation of bianalytic functions

In the space of generalized functions of slow growth, $S' = S'(C)$ complex systems of equations that generalize the equation of bianalytic functions are considered. A scheme for determining the structure of the solution carrier is obtained. Based on this, a method for finding a solution is presented.

Keywords: Schwarz space, support, theorem on the structure of generalized functions supported on a circle.

Рассмотрим эллиптическую систему второго порядка, записанную в комплексной форме

$$Lw \equiv w_{\bar{z}z} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w + c(z)\bar{w} = f(z), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, a, b, c, f – заданные в некоторой области G функции. При $a = b = c = f = 0$ получаем уравнение бианалитических функций или так называемую систему уравнений Бицадзе (см. [1], [2]), для которой задача Дирихле не является нётеровой. Для систем вида (1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости C решениях может быть не нётеровой. Например, система

$$w_{\bar{z}z} + c\bar{w} = 0,$$

Байзаев Саттор, д.ф.-м.н., профессор, ТГУШБП (Худжанд, Таджикистан); Bayzoev Sattor (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

Садиков Маъруфджон Обидович, преподаватель, ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Sodiqov Marufjon (B.G.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

где c —ненулевая постоянная, имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных на C решений

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

здесь p —произвольная постоянная, $q = \frac{|c|}{c}\bar{p}e^{-2i\alpha}$,

$\omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}z)\right]$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Когда a и b являются постоянными и $c = f = 0$ система (1) превращается в уравнение метааналитических функций (см. [2]).

Эту систему будем рассматривать в пространстве Шварца $S' = S'(C)$ —пространство умеренно растущих распределений на C . Построена схема нахождения решений однородного уравнения $Lw = 0$ в случае постоянных коэффициентов.

Введём функцию

$$\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4|a|^2|\zeta|^2 - 8\operatorname{Re}(\bar{b}\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) - 4i\operatorname{Re}(\bar{a}|\zeta|^2 - 4a\bar{b})\zeta.$$

Если $\Delta(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in C$, то система (1) будет иметь в S' только нулевое решение. Если же $\Delta(\zeta) = 0$ на каком-нибудь множестве K , то носитель $\operatorname{supp}\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству K , и зная K можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ —множество нулей функций $\Delta(\zeta), \operatorname{Re}\Delta(\zeta), \operatorname{Im}\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и множества Γ_1, Γ_2 имеют такие свойства: Γ_1 —ограничено, симметрично относительно начало координат O , при вещественном b —относительно вещественной оси; $\Gamma_2 = C$ при $a = 0$, Γ_2 —проходит через точку O . Определённая структура множеств Γ_1 и Γ_2 .

Например, при $a = 0$ имеем $\Gamma_2 = C$. Если $b = c = 0$, то Γ_1 —точка $\zeta = 0$ и $\Gamma = \{0\}$ и использовать теорему о структуре обобщенных функций с точечным [3] находим

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z},$$

где P_N и Q_{N-1} —многочлены по z степени N и $N-1$ соответственно.

Если $b = 0$ и $c \neq 0$, то Γ_1 —окружность и нужно использовать теорему о структуре обобщенных функций с носителем на окружности (см. [4]).

Пусть $b \neq 0$. Если $|b| < |c|$, то Γ_1 — замкнутая симметричная относительно точки O кривая, содержащая внутри эту точку. При $|b| = |c|$ Γ_2 —является кривой вида "восьмёрка" проходящая через начало координат. При $|b| > |c|$ Γ_1 будет объединением двух замкнутых кривых, симметричных относительно осей координат, причём одна находится в правой полуплоскости, а другая — в левой.

Исследованы все случаи и определены все решения уравнения $Lw = 0$ из пространства S' .

Литература

1. *Балж М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991. Том 85. С. 187–246.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. – 280 с.
4. *Байзаев С., Рахимова М.А.* О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 1. – С. 3 – 13.