О КОМПЬЮТЕРНЫХ АЛГОРИТМАХ ОПИСАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^4$

@ А.В. Лобода, Т.Т.З. Нгуен

lobvgasu@yandex.ru, nttduong@ued.udn.vn

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.50.

Матричные 3-мерные алгебры Ли, отвечающие аффинно однородным поверхностям пространства $\mathbb{R}^4$, ищутся как решения (в пакете Maple) больших систем квадратичных уравнений на элементы базисных матриц алгебры и коэффициенты канонических уравнений орбит этих алгебр. Описаны все алгебры, орбиты которых «слабо вырождены» и имеют в канонических уравнениях специальный вид квадратичного и кубического многочленов.

Ключевые слова: однородная гиперповерхность, алгебра Ли, символьные вычисления

On computer algorithms for describing homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$

The matrix 3-dimensional Lie algebras corresponding to affinely homogeneous surfaces of the space $\mathbb{R}^4$ are sought as a solutions (in the Maple package) of large systems of quadratic equations for the elements of the basis matrices of the algebra and the coefficients of the canonical equations of the orbits of these algebras. All algebras are described whose orbits are “weakly degenerate” and have a special form of quadratic and cubic polynomials in the canonical equations.

Keywords: homogeneous hypersurface, Lie algebra, symbolic computation

Важным фрагментом классификации голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^4$ должно стать описание трубок над аффинно однородными гиперповерхностями пространства $\mathbb{R}^4$. При этом в последней задаче к настоящему времени изучены лишь поверхности с невырожденной квадратичной формой, имеющие более чем 3-мерные алгебры Ли касательных (аффинных) векторных полей (см. [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Лобода Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия); Alexander Loboda (Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг, к.ф.-м.н., университет Дананга (Дананг, Вьетнам); Nguen Thi Thuy Duong (The university of DaNang - University of Science and Education, Vietnam)

Ниже обсуждаются аффинно однородные «слабо вырожденные» гиперповерхности в $\mathbb{R}^4$, являющиеся орбитами 3-мерных алгебр Ли. Уравнение любой такой орбиты задаем в виде

$$x_4 = x_1x_2 + (x_1^3 + x_1x_2x_3) + \sum_{k \geq 4} F_k(x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Каждая из базисных матриц 3-мерной алгебры аффинных векторных полей содержит $16 = 4 \times 4$ неизвестных элементов и включает в себя сдвиг по направлению одной из осей x_1, x_2, x_3 в касательной плоскости к орбите. Учет касания поверхности (1) полями из алгебры дает линейные ограничения на часть матричных элементов, а условие замкнутости алгебры относительно коммутатора $[E_j, E_k] = E_jE_k - E_kE_j$ базисных полей приводит к системе 48 квадратичных уравнений относительно оставшихся 24 матричных элементов.

Попытки использования команды solve и базисов Гребнера оказались безуспешными как в данной ситуации, так и в случае более общего многочлена F_3 из уравнения (1). В то же время обозначенный упрощенный вид многочленов $F_2 = x_1x_2$ и $F_3 = x_1^3 + x_1x_2x_3$ позволяет с помощью символьных вычислений полностью решить эту систему пошаговым методом.

Теорема 1. *Существует лишь 4 семейства 3-мерных матричных алгебр Ли, соответствующих решениям обозначенной системы. Два из этих семейств являются 5-параметрическими, каждое из остальных двух семейств описывается 4 параметрами.*

Базис одного 5-параметрических семейств алгебр Ли приведен ниже:

$$E_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & -1 & a_{14} & 1 \\ -3 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{14} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (a_{34} - a_{11}a_{14})/3 & 0 \\ 0 & -(a_{24} + a_{31})/3 & -1 & a_{14} & 1 \\ a_{14} & -(a_{34} - a_{11}a_{14})/3 & 0 & -a_{14}(a_{24} + a_{31})/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(a_{24} + a_{31})/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для перехода от алгебр Ли к их орбитам приходится преобразовывать базисы этих алгебр к виду, удобному для интегрирования, освобождаясь при этом от «лишних» параметров. Так, второе 5-параметрическое семейство полученных алгебр содержит 4-параметрическое подсемейство абелевых алгебр Ли. В свою очередь, это подсемейство удастся свести матричными подобиями к 2-параметрическому семейству алгебр Ли с базисами вида $(\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Поводом к изучению однородных поверхностей вида (1) послужили линейно однородные орбиты в $\mathbb{R}^4$ именно этого семейства алгебр, описываемые (при $\mu_1 = t_1 + t_2, \mu_2 = -t_1 t_2, t_1 \neq t_2$) уравнениями

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = (x_2^2 - \mu_1 x_2 x_4 - \mu_2 x_4^2) \ln \left(\frac{x_4 - t_2 x_4}{x_4 - t_1 x_4} \right). \quad (4)$$

Литература

1. *Eastwood M.G., Ezhov V.V.* Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space // Труды МИАН. **235** (2001), 49–63.