ОГИБАЮЩИЕ ИЗ ПОДКЛАССОВ ПОЧТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

@ Б.Н. Хабибуллин
khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.65.

Наше функционально-аналитическое двойственное описание огибающих относительно конусов в проективных пределах упорядоченных пространств адаптировано к пространствам локально интегрируемых функций и конусам почти (плюри)субгармонических функций с приложениями к различным задачам комплексного анализа.

Ключевые слова: локально интегрируемая функция, почти субгармоническая функция, нижняя огибающая, двойственное представление.

Envelopes from subclasses of almost subharmonic functions and their applications

Our functional-analytic dual description of envelopes with respect to cones in the projective limits of ordered spaces are adapted to spaces of locally integrable functions and cones of almost (pluri)subharmonic functions with applications in various problems of complex analysis.

Keywords: locally integrable function, almost subharmonic function, lower envelope, dual representation

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ и $\mathbb{R}$ — множества *натуральных* и *вещественных* чисел, $\mathbb{R}^d$ — арифметическое векторное пространство размерности $d \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ — непустая *область*, а понятия (локальной) суммируемости и почти всюду (п.в.) понимаются относительно меры Лебега λ на D . Векторное пространство над $\mathbb{R}$ локально суммируемых функций, п.в. определённых на D значениями из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, после факторизации относительно отношения поточечного равенства п.в. будем обозначать как $L^1_{\text{loc}}(D)$, снабжая его топологией L^1 сходимости на компактах и отношением поточечного порядка $\leq$ п.в. В терминологии из [1; § 1], [2], [3; 3.2, пример 3] это пространство — приведённый правильный проективный предел векторных решёток Фреше с двойственным

Работа выполнена в рамках Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия);
Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

пространством $L_0^\infty(D)$ ограниченных п.в. функций на D со значениями в $\mathbb{R}$ и с компактным носителем в D .

Функция $v \in L_{\text{loc}}^1(D)$ называется *почти субгармонической*, если для замкнутых шаров $\overline{B}_x(r) \subset D$ радиуса $r > 0$ с центром $x \in D$ её средние

$$\frac{1}{\lambda(\overline{B}_x(r))} \int_{\overline{B}_x(r)} v \, d\lambda$$

по этим шарам для почти всех точек $x \in D$ возрастают по $r > 0$ [4; гл. II, § 9], [5]. Развитие наших результатов [2; теорема 7.1], [3; теорема 6] —

Теорема. Пусть $H \subset L_{\text{loc}}^1(D)$ — непустой выпуклый конус, состоящий из почти субгармонических функций на D , и для каждого компакта K для любой константы $c \in \mathbb{R}$ найдётся $h \in H$, для которой $h \leq c$ п.в. на K . Допустим, что выполнено одно из условий

(i) для любой локально ограниченной сверху последовательности функций $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ верхний предел

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} h_k := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} h_k$$

принадлежит H ;

(ii) множество H секвенциально замкнуто в $L_{\text{loc}}^1(D)$.

Тогда для каждой функции $F \in L_{\text{loc}}^1(D)$, локально ограниченной на D , при любой функции $0 \neq g \in L_0^\infty(D)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int h g \, d\lambda \mid h \in H, h \leq F \right\} \\ &= \inf \left\{ \int F G \, d\lambda \mid G \in L_0^\infty(D), \int h g \, d\lambda \leq \int h G \, d\lambda \quad \text{при всех } h \in H \right\}. \end{aligned}$$

Условиям теоремы на выпуклый конус H удовлетворяют конус всех субгармонических функций (случай (i)) и пространство всех гармонических функций (случай (ii)) в областях D , а также, конус всех плюрсубгармонических и пространство всех плюригармонических функций из n -мерного комплексного пространства, отождествленного с $\mathbb{R}^d$ с $d := 2n$. Содержательный вариант приведённой теоремы возможен и для выпуклых множеств H почти субгармонических функций с некоторыми изменениями в правой части заключительного равенства.

Одно из основных следствий этой теоремы — существование функции $h \in H$, огибающей функцию F снизу на всей области D , эквивалентно конечности точной нижней грани из правой части заключительного равенства теоремы. Это следствие находит применения к

проблемам о нетривиальности весовых классов голоморфных функций, об описании нулевых множеств и подмножеств в таких весовых классах, о возможности представления мероморфных функций в виде частного двух голоморфных или целых функций со специальными ограничениями на их рост, об аппроксимации экспоненциальными и иными системами функций в функциональных пространствах и проч.

Литература

1. *Хабидуллин Б.Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. матем., **65**:4 (2001), 205–224; *Izv. Math.*, **65**:4 (2001), 835–852.
2. *Хабидуллин Б.Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Сер. матем., **65**:5 (2001), 167–190; *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 1017–1039.
3. *Хабидуллин Б.Н., Розит А.П., Хабидуллина Э.Б.* Порядковые версии теоремы Хана – Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **162**. — Москва: ВИНТИ РАН, 2019. — 93–135. English translation in: *Khabibullin B.N., Rozit A.P., Khabibullina E.B.* Order versions of the Hahn–Banach theorem and envelopes. ii. Applications to function theory // *Journal of Mathematical Sciences*, **257**:3 (2021), 366–409.
4. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. — Москва: Мир, 1964.
5. *Arsove M.G.* Functions representable as differences of subharmonic functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), 327–365.