РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ НА ХОРДЕ

@ Х.К. Ишкин

ishkin62@mail.ru

УДК 517.984, 517.928

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.16.

В работе получена формула регуляризованного следа оператора $T_0 + V$, где L_γ – оператор Штурма–Лиувилля на гладкой кривой γ с потенциалом q , имеющим полюса внутри хорды, стягивающей γ , V – оператор умножения на функцию $\mathcal{V}$, голоморфную в некоторой окрестности кривой γ , содержащей хорду. Показано, что если q удовлетворяет условию тривиальной монодромии около каждого своего полюса, то формула регуляризованного следа в точности совпадает с формулой Гельфанда–Левитана–Дикого для регуляризованного следа классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с квадратично суммируемым потенциалом q , ряд Фурье которого сходится на концах отрезка.

Ключевые слова: спектр, оператор Штурма–Лиувилля, безмономические потенциалы, регуляризованные следы.

Regularized trace of the Sturm–Liouville operator on a curve with regular singular points on the chord

In this paper, we obtained a formula for the regularized trace of the operator $L_\gamma + V$, where L_γ is the Sturm–Liouville operator on a smooth curve γ with potential q having poles inside the chord contracting γ , V is the operator of multiplication by a function $\mathcal{V}$, which is holomorphic in some neighborhood of the curve γ containing a chord. We have shown that if q satisfies the trivial monodromy condition near each of its poles, then the regularized trace formula exactly coincides with the Gelfand–Levitan–Dikii formula for the regularized trace of the classical Sturm–Liouville operator on an interval with a square-summable potential q , whose Fourier series converges at the ends of the segment.

Keywords: spectrum, Sturm–Liouville operator, monodromy-free potentials, regularized traces.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть γ — некоторая кривая на комплексной плоскости с параметризацией $z = x + ig(x)$, $x \in [0, 1]$, где g — кусочно-гладкая функция на $[0, 1]$ и $g(0) = g(1) = 0$.

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. Оператор L_γ , действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_\gamma y = -y'' + qy$, $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$, будем называть *оператором Штурма–Лиувилля на кривой γ* . L_γ — замкнут, плотно определен и имеет компактную резольвенту [1]. Если $q \in L^2(\gamma)$, то Q — оператор умножения на функцию q — определен на всем $L^2(\gamma)$ и ограничен. В этом случае оператор $L_\gamma = T_\gamma + Q$ является ограниченным возмущением T_γ — оператора Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом, спектр которого состоит из простых собственных чисел $\lambda_n^0 = (\pi n)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Если $\gamma \neq [0, 1]$, то спектр L_γ может сильно отличаться от спектра T_γ , даже при бесконечно гладких q [1, 2]. Поэтому естественно ожидать, что класс возмущений, при которых

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

весьма узок. В работе [3, теорема 2] в случае, когда функция g выпукла вниз, было получено полное описание этого класса. Этому классу принадлежит, например, функция

$$q(z) = \sum_{n=1}^N \frac{k_n(k_n - 1)}{(z - a_n)^2} + V(z), \quad (2)$$

где $a_1, \dots, a_N \in \Omega$, $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, Ω — область, ограниченная кривой γ и $[0, 1]$, функция V принадлежит пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ и такова, что в каждой точке a_n функция (1) удовлетворяет условию тривиальной монодромии

$$q(z) = \frac{k(k+1)}{(z - a_n)^2} + \sum_{j=0}^k c_j (z - a_n)^{2j} + O((z - a_n)^{2k+1}). \quad (3)$$

Если функция $W(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} V(x - i\epsilon)$ достаточно гладкая, то формулу (1) можно уточнить. В частности, если $W \in C^{(2)}[0, 1]$, то

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + c_0 + O(n^{-2}), \quad c_0 = \int_{\gamma} q(z) dz. \quad (4)$$

В связи со сказанным возникает вопрос: *Какой вид будет иметь формула (1), если отказаться от условия суммируемости функции q на $(0, 1)$? Если q имеет неинтегрируемые особенности в интервале $(0, 1)$, то каков их вклад в формулу (4)?*

Мы рассмотрим более общую ситуацию, когда функция g необязательно выпукла. Пусть D — область, в которой кривая γ гомотопна $[0, 1]$ и пусть функция q имеет вид (2), где функция V голоморфна в D , часть точек $a_1, \dots, a_N$ лежат в $(0, 1)$, остальные — в $D \setminus \gamma$. Кроме того, будем считать, что в тех точках a_n , которые лежат вне $(0, 1)$, условие (3) выполнено. Обозначим через A множество всех полюсов q , через A_1 — тех, которые лежат в $(0, 1)$, и через A_2 — множество остальных a_n . Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в $D \setminus A$, соединяющая точки 0 и 1. Будем говорить, что *кривая γ эквивалентна кривой $\tilde{\gamma}$* , если $\tilde{\gamma}$ также лежит в $D \setminus A$ и гомотопна γ в области $D \setminus A_1$. По предположению все точки из A_2 удовлетворяют условию тривиальной монодромии. Поэтому для любых эквивалентных кривых γ и $\tilde{\gamma}$ спектры операторов L_γ и $L_{\tilde{\gamma}}$ совпадают. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что все полюсы q лежат в интервале $(0, 1)$, а кривая γ является графиком гладкой функции.

В работе [4] показано, что в случае, когда $N = 1$ и $V = 0$, имеет место формула (2) так, что

$$\sum_{n=1} (\lambda_n - (\pi n)^2 - c_0) = \frac{c_0}{2} - \frac{q(0) + q(1)}{4}. \quad (5)$$

Это равенство в точности совпадает с формулой Гельфанда–Левитана–Дикого для регуляризованного следа классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с квадратично суммируемым потенциалом q , ряд Фурье которого сходится на концах отрезка.

Справедлива

Теорема 1. Пусть функция q имеет вид (2), где $0 < a_1 < \dots < a_N < 1$, $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, функция V голоморфна в некоторой области D , содержащей отрезок $[0, 1]$. Тогда при любой гладкой кривой γ , лежащей в D , соединяющей точки 0 и 1 и не проходящей через точки $a_1, \dots, a_N$, собственные числа оператора L_γ удовлетворяют равенству (4) так, что справедлива формула (5).

Литература

1. *Ishkin Kh.K.* Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem on a Curve // Math. Notes. **78**:1 (2005), 64–75.
2. *Ishkin Kh.K.* On the Uniqueness Criterion for Solutions of the Sturm–Liouville Equation // Math. Notes. **84**:4 (2008), 515–528.
3. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.
4. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a Regular Singularity on the Chord // Differential Equations **56**:10 (2020), 1291–1303.