РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЛЬЯВЕНА – РУБЕЛЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НУЛЕЙ НА КОМПЛЕКСНЫЕ

@ А.Е.Салимова, Б.Н. Хабибуллин

anegorova94@bk.ru, khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.547.2

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.61.

Классический результат П. Мальявена и Л. А. Рубеля о малости целых функциях экспоненциального типа с заданными распределениями нулей на положительной полуоси распространяется на распределения комплексных нулей, отделенных парой вертикальных углов сколь угодно малого раствора от мнимой оси. При этом используется и развитие логарифмических характеристик для распределений комплексных точек.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа, распределение корней, рост целой функции, логарифмические характеристики и меры.

Extension of the Malliavin – Rubel theorem from distributions of positive zeros to complex distributions

The classical result of P. Malliavin and L. A. Rubel on small entire functions of exponential type with given distributions of zeros on the positive semiaxis extends to distributions of complex zeros separated by a pair of vertical angles of an arbitrarily small opening from the imaginary axis. In this case, the development of logarithmic characteristics for the distributions of complex points is also used.

Keywords: entire function of exponential type, distribution of zeros, growth of entire function, logarithmic characteristics and measures.

Всюду далее $Z = \{z_j\}_{j=1,2,\dots}$ и $W = \{w_j\}_{j=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ — распределения точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *конечной верхней плотности*, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \left(\sum_{|z_j| \leq r} 1 + \sum_{|w_j| \leq r} 1 \right) < +\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90074). Салимова Анна Евгеньевна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Salimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Хабибуллин Булат Нурмиевич доктор физ.-мат. наук, профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

В обозначении $\operatorname{Re}^+ z := \max\{0, \operatorname{Re} z\}$ определим *правый* и *левый характеристические логарифмы* для Z соответственно как

$$l_Z^{\text{rh}}(r) := \sum_{0 < |z_j| \leq r} \operatorname{Re}^+ \frac{1}{z_j}, \quad l_Z^{\text{lh}}(r) := \sum_{0 < |z_j| \leq r} \operatorname{Re}^+ \frac{1}{-z_j},$$

а также *логарифмическую субмеру интервалов* для Z

$$l_Z(r, R) := \max \{l_Z^{\text{rh}}(R) - l_Z^{\text{rh}}(r), l_Z^{\text{lh}}(R) - l_Z^{\text{lh}}(r)\}, \quad 0 < r < R \leq +\infty.$$

Пусть $f \neq 0$ — целая функция на $\mathbb{C}$. Через Zero_f обозначаем распределение всех её корней, перенумерованное с учётом кратности. Если f обращается в нуль на $Z \subset \operatorname{Zero}_f$ с учётом кратности, то пишем $f(Z) = 0$, и f — *целая функция экспоненциального типа* (ц.ф.э.т.), если $\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|} < +\infty$. Основной результат статьи П. Мальявена и Л. А. Рубела [1; теорема 4.1] —

Теорема Мальявена–Рубела. Пусть Z и W лежат на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Эквивалентны три утверждения:

I. Для любой ц.ф.э.т $g \neq 0$ с $g(W) = 0$ найдется ц.ф.э.т. $f \neq 0$ с $f(Z) = 0$, удовлетворяющая ограничению

$$|f(iy)| \leq |g(iy)| \quad \text{для всех } y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

II. Найдутся ц.ф.э.т $g \neq 0$ с $g(W) = 0$ и $\operatorname{Zero}_g \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} = W$, а также ц.ф.э.т. $f \neq 0$ с $f(Z) = 0$, удовлетворяющие (1).

III. Существует $C \in \mathbb{R}$, для которого $l_Z(r, R) \leq l_W(r, R) + C$ при всех значениях $0 < r < R < +\infty$.

Наше развитие теоремы Мальявена–Рубела из [2; теорема 2.1] —

Теорема. Для $Z \subset \mathbb{C}$ и $W \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ при условиях

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{Re} z_j|}{|z_j|} > 0, \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} w_j}{|z_j|} > 0$$

все три утверждения I–III из теоремы Мальявена–Рубела по-прежнему остаются эквивалентными.

Литература

1. Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France., **89**:2 (1961), 175–201.
2. Салимова А.Е., Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфимский математический журнал, **13**:3 (2021), 116–128.