ОБ ОПЕРАТОРЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

@ Г.Р. Галимова

79170419513@rambler.ru

УДК 517.984

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.11.

В работе изучаются некоторые спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля на кривой γ . В частности, показано, что если γ имеет ограниченный наклон, то система корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с произвольным суммируемым потенциалом образует в $L^2(\gamma)$ базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка, определяемого максимальным наклоном кривой.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля на кривой, несамосопряженные операторы, базисность корневых векторов для суммирования методом Абеля–Лидского.

On the Sturm–Liouville operator on a rectifiable curve

We study some spectral properties of the Sturm–Liouville operator on a curve γ . In particular, we have shown that if γ has a bounded slope, then the system of root vectors of the Sturm–Liouville operator with an arbitrary summable potential forms in $L^2(\gamma)$ a basis for summation by the Abel–Lidsky method of order determined by the maximal slope of the curve.

Keywords: Sturm–Liouville operator on a curve, non-self-adjoint operators, Abel–Lidskii basis property of system of root vectors.

Пусть γ – спрямляемая кривая с концами 0 и 1. Будем говорить, что функция f на γ дифференцируема в точке $a \in \gamma$ если существует конечный предел $f'(a) = \lim_{z \in \gamma, z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$. Производные более высоких порядков определяются аналогично.

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. Обозначим через L_γ оператор с областью определения $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_0 y = -y'' + qy$.

Если $\gamma \in [0, 1]$, то справедливы утверждения (см., [1], [2, Гл. VI, § 2] и [3, Гл. I, теорема 1.3.2]):

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Галимова Гульнара, магистрант I года обучения ФМИИТ, БашГУ (Уфа, Россия);
Gulnara Galimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

- 1) оператор L_γ плотно определен, замкнут;
- 2) спектр состоит из счетного числа собственных значений, имеющих асимптотику $\lambda_n \sim (\pi n)^2 + O(1)$, $n \rightarrow \infty$;
- 3) $\|(L_\gamma - re^{i\alpha})^{-1}\| = O(r^{-1})$, $r \rightarrow +\infty$, при любом $\alpha \neq 0$;
- 4) система собственных и присоединенных функций $\{f_n\}$ образует базис в $L^2(0, 1)$: любая функция $f \in L^2(\gamma)$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по $\{f_n\}$, равносходящийся с рядом Фурье по $\cos nx$.

Пусть γ — произвольная спрямляемая кривая. Поставим вопрос: какие из утверждений 1) — 4) и в какой мере сохраняют силу.

Теорема 1. *Оператор L_γ плотно определен, замкнут, его спектр дискретен и бесконечен.*

Луч, на котором выполняется оценка из 3), называется *лучом наилучшего убывания резольвенты*.

Пример. Пусть Γ — окружность, проходящая через точки 0, 1 и $1/2 - ia$ ($a > 0$), γ — часть Γ , лежащая ниже вещественной оси, и пусть $q = 0$. Тогда при $a > 1/2$ лучей наилучшего убывания нет.

Пусть Γ — кривая с параметризацией $z = x + i\gamma(x)$, $x \in [0, 1]$, где функция γ удовлетворяет условию Липшица $|\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ при всех $x_1 \neq x_2$, M — постоянная. Такую кривую называют *кривой ограниченного наклона*.

Положим

$$M_1 = \inf_{0 \leq x_1 < x_2 \leq 1} \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad M_2 = \sup_{0 \leq x_1 < x_2 \leq 1} \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$\alpha_i = \arctg M_i$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Справедливы утверждения:*

- (i) *Вне угла $-2\alpha_2 < \arg z < -2\alpha_1$ спектр оператора L_γ конечен;*
- (ii) *Любой луч $\arg z = \alpha$ ($\alpha \in (-2\alpha_1, \pi] \cup [-\pi, -2\alpha_2)$) является лучом наилучшего убывания резольвенты;*
- (iii) *Пусть $\theta = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Тогда система корневых векторов оператора L образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка $\frac{1}{2} < \delta < \frac{\pi}{2\theta}$.*

Литература

1. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1972.
3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.