ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЯМИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ПЕРВОГО В ПОЛУПЛОСКОСТИ

© К.Г. Малютин, М.В. Кабанко, В.А. Малютин

malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru, vladmaliutin2003@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.51.

Решена задача простой свободной интерполяции в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка, не превосходящего единицу. Найдены критерии разрешимости в терминах канонического произведения и меры, соответствующих узлам интерполяции.

Ключевые слова: свободная интерполяция, полуплоскость, конечный порядок

Interpolation by functions of order less than the first in half-plane

The problem of simple free interpolation in the space of analytic functions in the upper half-plane of finite order not exceeding one is solved. Criteria for solvability are found in terms of the canonical product and measure corresponding to the interpolation knots.

Keywords: free interpolation, half-plane, finite order

Обозначим через AK пространство аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ функций $f(z)$, таких, что в каждой ограниченной области, принадлежащей верхней полуплоскости, $\ln |f(z)|$ имеет положительную гармоническую мажоранту.

Пусть функция $f \in AK$ такая, что непусто множество $\{\mu\}$ тех $\mu > 0$, для которых имеет место оценка

$$\sup_{0 < \theta < \pi} \ln |f(re^{i\theta})| < r^\mu, \quad r > r_\mu.$$

Обозначим через $\{\nu\}$ множество таких чисел $\nu > 0$, для которых

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\nu} \equiv 0, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Кабанко Михаил Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, КГУ (Курск, Россия); Mikhail Kabanko (Kursk State University, Russia)

Малютин Владислав Александрович, студент, СумГУ (Сумы, Украина), Международная школа Riverstone (Бойсе, США); Vladyslav Maliutin (Sumy State University, Ukraine; Riverstone International School, Boise, USA)

Следуя Н. В. Говорову [1, Глава I, §1, Определение 1.1], введем следующее определение:

Определение 1 (Говоров). Число

$$\rho = \max\{\inf\{\mu\}, \inf\{\nu\}\}$$

называется *порядком функции* $f \in AK$ в смысле Говорова.

В отличие от целых функций, для которых порядок характеризует ее рост в окрестности бесконечной точки, для функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, понятие порядка может характеризовать как ее рост, так и убывание при $|z| \rightarrow \infty$.

Обозначим через AK_ρ , $\rho > 0$ пространство аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций $f(z)$, порядок которых в смысле эквивалентных между собой определений Н. В. Говорова [1, Глава I, §1, Определение 1.1] и Е. Титчмарша [2, с. 191] не превосходит ρ .

Введем следующее определение.

Определение 2. Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$ называется *интерполяционной последовательностью в пространстве AK_ρ* , $0 < \rho \leq 1$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяющих условиям:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n| + 1} < \infty, \quad \limsup_{|a_n| \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leq \rho,$$

существует функция $F \in AK_\rho$, решающая проблему интерполяции

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам *свободной интерполяции*, когда на значения в узлах накладываются минимальные ограничения, обусловленные принадлежностью интерполирующей функции заданному пространству. Мы получаем критерии ее разрешимости в терминах канонического произведения, соответствующего узлам интерполяции.

Теорема. Следующие два утверждения эквивалентны.

1) Последовательность A является интерполяционной последовательностью в пространстве AK_ρ , $0 < \rho \leq 1$.

2) Каноническая функция $E(z)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)| \Im a_n} < \infty, \quad \limsup_{|a_n| \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)| \Im a_n} \leq \rho.$$

Задачи простой и кратной интерполяции в пространстве AK_ρ при $\rho > 1$ были решены в работах [3, 4, 5, 6].

Литература

1. *Говоров Н.В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.
2. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.
3. *Malyutin K.G., Gusev A.L.* The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal., **7(25)**:Special Issue (2018), 113-123.
4. *Malyutin K.G., Gusev A.L.* Geometric meaning of the interpolation conditions in the class of functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**:3, 96-104.
5. *Malyutin K., Kabanko M.* Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-plane // Lobachevskii Journal of Mathematics, **41**:11 (2020), 2211-2222.
6. *Malyutin K., Kabanko M., Kozlova I.* Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-plane. II // Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**:4 (2021), 811-822.