ОЦЕНКИ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ

@ Г.Г. Брайчев, О.В. Шерстюкова

braichev@mail.ru, sherov73@mail.ru

УДК 517.547.22

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.39.

Обсуждается вопрос о том, насколько сильно может измениться тип целой функции конечного положительного порядка с заданной последовательностью нулей, если разрешить такой функции иметь дополнительно другие нули. В 2009 году Б.Н. Хабибуллин получил общий результат по этой задаче. В докладе намечены возможности для конкретизации указанного результата, основанные на серии теорем (часть из которых доказана авторами) о вычислении экстремального типа целой функции с ограничениями на распределение нулей.

Ключевые слова: целая функция, последовательность нулей, тип целой функции.

Estimates of the type of an entire function with a given subsequence of zeros.

The question is discussed how much can change the type of the entire function of finite positive order with a given sequence of zeros if we give additional zeros to this function. The general result on this problem was obtained in 2009 by B.N. Khabibullin. Based on a series of works by the authors possibilities for concretizing this result are indicated.

Keywords: entire function, sequence of zeros, type of an entire function.

Пусть заданы последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности (среди точек λ_n могут быть и повторяющиеся), и число $\rho > 0$. Следуя [1], обозначим символом $\sigma(\Lambda, \rho)$ (соответственно $\sigma^*(\Lambda, \rho)$) точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, при которых Λ — *последовательность* (соответственно *подпоследовательность*) *всех нулей* для какой-либо отличной от тождественного нуля целой функции $f(\lambda)$, имеющей тип σ при порядке ρ . По определению считаем $\inf \emptyset = +\infty$.

В работе [1, следствие 1 теоремы 1] показано, что

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \sigma(\Lambda, \rho) \leq (1 + I_\rho) \sigma^*(\Lambda, \rho), \quad (1)$$

Брайчев Георгий Генрихович, д.ф.-м.н., профессор, МПГУ (Москва, Россия); George Braichev (Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia)

Шерстюкова Ольга Владимировна, учитель математики, ГБОУ Школа № 1579 (Москва, Россия); Olga Sherstyukova (School № 1579, Moscow, Russia)

где при целом ρ полагаем $I_\rho = +\infty$, а при нецелом ρ число I_ρ определено формулой

$$I_\rho \equiv \rho^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 - 2t \cos \theta + t^2) - \sum_{n=1}^p \frac{t^n}{n} \cos n\theta \right)^+ d\theta \right) \frac{dt}{t^{\rho+1}}.$$

Здесь приняты обозначения $p = [\rho]$ — целая часть ρ , $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Оценка снизу в (1) очевидна и точна при любом $\rho > 0$ (см. [1, доказательство предложения 2]). Оценка сверху в (1) — ключевой результат, доказанный в [1] новым, нетрадиционным методом, с использованием субгармонической техники. Весьма вероятно (но пока не доказано), что и эта оценка точна. Сформулированный результат Б.Н. Хабибуллина допускает различные варианты конкретизации. Рассмотрим, например, практически важный случай $\rho \in (0, 1)$, а Λ — положительная последовательность конечной верхней ρ -плотности $\bar{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta > 0$. Тогда величина $\sigma(\Lambda, \rho)$ равна типу (при порядке ρ) конкретного канонического произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

а коэффициент $1 + I_\rho$ упрощается к виду ([1, теорема 1])

$$1 + I_\rho = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2)}{\sqrt{\pi} 2^\rho \Gamma(1 - \rho/2)},$$

где Γ — гамма-функция. Привлекая теперь точное неравенство [2]

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geq \beta \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho} \equiv \beta C(\rho), \quad \rho \in (0, 1),$$

извлекаем из (1) оценку

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \geq \beta \frac{\sqrt{\pi} 2^\rho \Gamma(1 - \rho/2)}{\Gamma(1/2 - \rho/2)} C(\rho), \quad \rho \in (0, 1),$$

действующую для любой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с фиксированным значением верхней плотности $\bar{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$. Такой комбинированный результат является простейшим на выбранном пути.

К настоящему моменту известна серия точных теорем, в которых для порядков $\rho \in (0, 1)$ и положительной последовательности Λ с заданными плотностными характеристиками и шагом найдено наименьшее

значение для величины $\sigma(\Lambda, \rho)$ (см. [2]–[6]). Отдельные результаты подобного характера имеются как для $\rho > 1$, так и для других ситуаций локализации последовательности Λ . Это открывает новые возможности по применению оценки (1), в том числе — к известной задаче о радиусе круга полноты системы экспонент с показателями, расположенными на заданном множестве.

Литература

1. *Хабибуллин Б.Н.* Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сб., **200**:2 (2009), 129-158.
2. *Попов А.Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1 (2005), 31-36.
3. *Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем., **75**:1 (2011), 3-28.
4. *Брайчев Г.Г.* Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Матем. сб., **203**:7 (2012), 31-56.
5. *Шерстюкова О.В.* Задача о наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями заданных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн., **7**:4 (2015), 146-154.
6. *Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундамент. и прикл. матем., **22**:1 (2018), 51-97.