ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

@ А. А. Лобода
orion1312@yandex.ru

УДК 517.1

DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.49.

Получены формулы Фейнмана – Каца, представляющие решения задачи Коши для стохастического уравнения типа Шрёдингера. При этом используется метод аналитического продолжения по аргументу функционального интеграла, представляющего решения ассоциированного уравнения теплопроводности. Результаты обобщаются на случай многомерного белого шума.

Ключевые слова: Функциональные интегралы, стохастические уравнения, уравнение Шрёдингера, формула Фейнмана-Каца.

Representations of solutions of multidimensional stochastic differential equations

The Feynman-Kac formulas representing the solutions of the Cauchy problem for a stochastic equation of the type of Schrödinger. In this case, we use the method of analytical continuation by the argument of the functional integral representing the solutions of the associated heat equation. The results are generalized to the case of multidimensional white noise.

Keywords: Functional integrals, stochastic equations, Schrödinger equation, Feynman-Kac formula.

Мы рассматриваем стохастическое уравнение Шрёдингера с двумерным белым шумом (также называемое уравнением Белавкина):

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ & + \left(iV(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned}$$

Здесь λ_1 и λ_2 – неотрицательные числовые параметры, отвечающие за точность измерений квантовой системы, а B_1 и B_2 – независимые броуновские движения. Определение функции ψ – случайная функция, а конфигурационное пространство – двумерная вещественная плоскость.

Лобода Артём Александрович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия); Artyom Loboda (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сначала получается формула Фейнмана – Каца для ассоциированного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} d\psi(t)(q_1, q_2) = & \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \right) dt + \\ & + \left(V(q_1, q_2) - \frac{\lambda_1}{4} q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4} q_2^2 \right) \psi(t)(q_1, q_2) dt + \\ & + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} q_1 \psi(t)(q_1, q_2) dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} q_2 \psi(t)(q_1, q_2) dB_2(t). \end{aligned}$$

затем, с помощью замены переменных $\hat{\zeta}(q_1, q_2) = (\sqrt{i}q_1, \frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и аналитического продолжения, выводится формула Фейнмана-Каца для вспомогательного стохастического уравнения типа Шредингера с вещественным потенциалом, после чего при помощи ещё одного аналитического продолжения получено представление решения задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом. Таким образом, справедлива теорема о представлении решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом.

Теорема 1. Пусть функция V непрерывна в области $\hat{S}$, сужение функции V на внутреннюю часть $\hat{S}$ аналитично и ее производная в области $\hat{S}$ непрерывна и ограничена. Пусть еще функция η , определенная на $\hat{S}$, ограничена и непрерывна на $\hat{S}$, аналитична внутри $\hat{S}$ и обладает на $\hat{S}$ ограниченными производными первых двух порядков по каждому аргументу. Тогда функция $\mathcal{F}$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t)(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = & \int_{C_0[0,t]} \exp \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}} \int_0^t (\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau)) dB_1(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}} \int_0^t (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau)) dB_2(\tau) \right] \\ & \times \exp \left[- \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{2} (\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau))^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau))^2 \right] d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\int_0^t iV(\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(\tau), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(\tau)) d\tau \right] \times \\ & \times \eta(\hat{q}_1 + \sqrt{i}\hat{\xi}_1(t), \hat{q}_2 + \frac{1}{\sqrt{i}}\hat{\xi}_2(t)) w_{0,t} \hat{\zeta}^{-1}(d\hat{\xi}_1 d\hat{\xi}_2), \end{aligned}$$

является решением задачи Коши для уравнения Белавкина.

Для обобщения этого результата на бесконечномерный случай достаточно сделать замену переменных, при которой на корень из мнимой

единицы умножаются те из аргументов, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак плюс, а делятся те, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак минус.

Литература

1. *Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G.* Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations // *Izvestiya: Mathematics*, **69**:6 (2005), 1081-1098.
2. *Doss H.* Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques // *Communications in Mathematical Physics*, **73** (1980), 247-264.
3. *Loboda A.A.* The Doss Method for the Stochastic Schrödinger –Belavkin Equation // *Mathematical Notes*, **106**:2 (2019), 311-315.
4. *Loboda A.A.* Schrödinger Equation with Signed Hamiltonian // *Russian Journal of Mathematical Physics*, **27**:1 (2020), 99-103.